ANTONIO TRAJANO

ALGEBRA ELEMENTAR

QUINTA EDIÇÃO

Muito mais desenvolvida e exemplificada
que todas as edições precedentes, e devidamente ampliada com
materia nova de summa importancia

$$x^2 + 2px = q$$

$$x^2 + 2px + p^2 = q + p^2$$

$$x + p = \pm \sqrt{q + p^2}$$

$$x' = -p + \sqrt{q + p^2}$$

$$x'' = -p - \sqrt{q + p^2}$$

Rio de Janeiro
Companhia Typographica do Brazil
Rua dos Invalidos, 93

ALGEBRA ELEMENTAR

CONTENDO UM CURSO THEORICO E PRATICO DESTE RAMO DA SCIENCIA
INCLUINDO AS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU E PROGRESSÕES,
EXPOSTO POR UM METHODO FACILIMO,
SIMPLES E MUITO COMPREHENSIVEL

PELO PROFESSOR

ANTONIO TRAJANO

Auctor da Arithmetica Primaria, Arithmetica Elementar
e Arithmetica Progressiva Superior

QUINTA EDIÇÃO

MUITO AMPLIADA

RIO DE JANEIRO
Companhia Typographica do Brazil, r. dos Invalidos, 93

1905

Obras do professor Antonio Trajano

PARA O ENSINO DE MATHEMATICAS

Arithmetica Primaria para os meninos e meninas que começam o estudo de Arithmetica nas escolas primarias; contendo as quatro operações sobre numeros inteiros e fracções, expostas do modo mais simples, por meio de lições graduadas, e acompanhadas de exercicios e problemas proprios para o primeiro tirocinio do calculo.

Arithmetica Elementar Illustrada para as classes mais adiantadas das escolas, contendo toda a materia da Arithmetica, que deve ser ensinada nas aulas primarias, exposta por um methodo attractivo e deleitavel, e ornada de muitas gravuras adequadas ao texto. Obra premiada pelo jury da Exposição Pedagogica do Rio de Janeiro, e adoptada pela instrucção publica em quasi todos os Estados do Brasil.

Arithmetica Progressiva, curso completo, theorico e pratico de Arithmetica para o ensino secundario e superior, contendo todos os esclarecimentos uteis sobre este importante ramo da sciencia. Obra adoptada em muitas escolas normaes, lyceus e outros estabelecimentos de educação superior.

Chave da Arithmetica Progressiva. Esta obra contém a solução completa de todos os problemas [illegible] difficeis da Arithmetica Progressiva; contém tambem a resposta de todos [illegible] exercicios e problemas que nesta Arithmetica não levam resposta; contém [illegible] alguns exercicios interessantes para serem propostos aos discipulos.

Com [illegible] chave, qualquer professor poderá vantajosamente e sem difficuldade alguma [illegible]ccionar pela **Arithmetica Progressiva,** certo de que não encontrará embaraço algum em todo o curso deste compendio.

Algebra Elementar, contendo um curso theorico e pratico deste ramo da sciencia, incluindo as equações do segundo grau e progressões, exposto por um methodo facilimo, simples e muito comprehensivel.

Chave da Algebra. Esta obra apresenta a solução de todos os problemas e difficuldades da Algebra Elementar, e é de grande vantagem para o estudo desta disciplina.

Observação

Antonio Trajano

PREFACIO

Na Inglaterra, na França, na Allemanha e principalmente nos Estados Unidos a Algebra é considerada como um dos ramos mais uteis e interessantes da instrucção. Tal é a importancia que alli se dá a esta materia, que já foi incluida como parte do ensino obrigatorio nas escolas primarias, onde agora os meninos e meninas aprendem a converter facilmente os dados de um problema em uma equação algebrica.

Calcula-se que mais de quatrocentos mil compendios de Algebra se consomem annualmente nos Estados Unidos, e isto é sufficiente para nos dar uma idéa do modo por que se aprecia e desenvolve este ramo de estudo naquella grande e adiantada nação americana.

Não ha alli ensino secundario ou superior de qualquer natureza que seja, que dispense o estudo acurado de Algebra; no emtanto, entre nós, nem mesmo nas faculdades de direito se exige o exame de Algebra como preparatorio para o estudo das sciencias sociaes e juridicas! E, se nestes estabelecimentos de educação superior se dá tão pouco apreço a esta disciplina, que fará nos lyceus e collegios onde nem mesmo Arithmetica se ensina com perfeição?

Para podermos avaliar como esta materia é abandonada, ou para melhor dizer, ignorada entre nós, bastará só reflectirmos que, se exceptuarmos os homens formados em qualquer dos ramos das mathematicas, será bem difficil acharmos em nossas cidades pessoas que tenham conhecimento de Algebra.

Felizmente já vemos signaes de grande melhoramento. O Estado de S. Paulo, que nestes ultimos annos tanto se tem avantajado, ao ponto de apresentar um desenvolvimento material e uma actividade que causam pasmo, chegado a este grau de engrandecimento, não pôde supportar por mais tempo o systema atrazado e rotineiro de ensino que os seus antepassados lhe legaram, e por isso acaba de fazer uma reforma completa na instrucção publica, introduzindo, entre outros melhoramentos, o ensino obrigatorio de Algebra nas escolas primarias.

Este exemplo será em breve seguido por outros Estados, e, em poucos annos, veremos a nossa mocidade aproveitar-se, com grande vantagem, da força dessa alavanca poderosa do calculo, chamada Algebra.

Para ajudarmos a desenvolver o gosto por este estudo tão proveitoso, apresentamos agora este compendio, que pela sua simplicidade, clareza e methodo, muito contribuirá para despertar nos discipulos o interesse e gosto por esta materia que, ao mesmo tempo que é tão util para a vida, é tambem tão recreativa para o espirito.

Para tornarmos mais attractivo e ameno este estudo, abrandámos quanto foi possivel o rigor algebrico; empregamos em todo o livro uma linguagem simples e apropriada; exemplificamos todas as theorias, resolvendo todas as difficuldades, e illustrando cada ponto com numerosos exercicios e problemas interessantes e recreativos, e finalmente, abundamos em notas, explicações e referencias, porque sabemos que muitos daquelles que hão de estudar por este compendio, não terão outro explicador nem outro auxiliar além do livro que lhes servirá de mestre.

Aquelles que estudarem com attenção este pequeno curso de Algebra, não perderão o seu tempo, porque não sómente desenvolverão o seu raciocinio, e esclarecerão o seu espirito, mas ficarão tambem habilitados para resolver muitos calculos que, de modo algum, resolveriam só com o auxilio da Arithmetica.

QUARTA EDIÇÃO

Apresentámos a quarta edição desta Algebra muito mais desenvolvida e augmentada do que as tres edições anteriores; pois, além de novos problemas muito instructivos e interessantes, e de uma exposição perfeitamente clara das diversas soluções algebricas, accrescentamos ainda o desenvolvimento necessario nas equações do segundo grau, e outros esclarecimentos importantes.

QUINTA EDIÇÃO

Damos agora a quinta edição da nossa Algebra, ainda mais desenvolvida e ampliada com a *Theoria da Desigualdade, Equações binomicas* e outros pontos algebricos que tornam este compendio de grande utilidade e proveito para o ensino desta materia.

Autor.

ALGEBRA ELEMENTAR

1. Algebra é a parte das mathematicas que resolve os problemas, e demonstra os theoremas quando as quantidades são representadas por lettras.

2. Symbolos algebricos são lettras, numeros e signaes com que se exprimem as quantidades, e effectuam as operações.

3. Problema é uma questão que requer uma ou mais quantidades desconhecidas que se teem de obter por meio de quantidades conhecidas.

As quantidades conhecidas chamam-se **dados** do problema; as quantidades desconhecidas chamam-se **incognitas**, e o processo por meio do qual se acham as quantidades desconhecidas, chama-se **solução.**

4. As quantidades conhecidas são representadas pelas primeiras lettras do alphabeto: a, b, c, d, etc. As quantidades desconhecidas são representadas pelas ultimas lettras: x, y, z. Estas representações symbolicas teem o nome de **quantidades algebricas.**

Duas ou mais quantidades poden tambem ser representadas pela mesma lettra, mas neste caso é necessario distinguil-a com um ou mais accentos ou linhas, como x', x'', x''', que se lê: x' primo, x'' segundo, x''' terceiro.

5. Theorema é uma proposição que mostra alguma relação ou propriedade das quantidades algebricas, e que póde tornar-se evidente por meio de uma demonstração.

6. Em Algebra, as quantidades determinadas são representadas pelos dez algarismos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

7. Os signaes algebricos teem por fim indicar abreviadamente as operações que se teem de effectuar, e mostrar alguma relação que ha entre as quantidades algebricas.

Os seguintes signaes teem em Algebra a mesma significação que em Arithmetica:

$+$ lê-se: *mais*.	$<$ lê-se: *menor do que*.
$-$ lê-se: *menos*.	$\sqrt{}$ lê-se: *raiz*.
$\times$ lê-se: *multiplicado por*.	$\therefore$ lê-se: *portanto*.
$\div$ lê-se: *dividido por*.	$::$ lê-se: *está para*.
$=$ lê-se: *igual a*.	∞ lê-se: *infinito*.
$\pm$ lê-se: *mais ou menos*.	( ) chama-se *parenthesis*.
$>$ lê-se: *maior do que*.	——— chama-se *vinculo*.

Explicação dos signaes algebricos

8. O signal $=$, escripto entre duas quantidades, mostra que estas quantidades são iguaes em valor. Assim, a expressão $a=3$, que se lê: *a igual a 3*, quer dizer que a quantidade representada pela lettra a é igual a 3, isto é, tem o valor de 3.

9. O signal $+$, escripto entre duas quantidades, mostra que a segunda quantidade deve ser sommada com a primeira. Assim, $a+b$, que se lê: *a mais b*, quer dizer que a quantidade representada pela lettra b deve juntar-se com a quantidade representada pela lettra a. Se a fosse igual a 2, e b igual a 3, o resultado da expressão seria: $a+b=2+3=5$.

10. O signal $-$, escripto entre duas quantidades, mostra que a segunda quantidade deve ser subtrahida da primeira. Assim, $a-b$, que se lê: *a menos b*, quer dizer que a quantidade representada pela lettra b deve ser subtrahida da quantidade representada por a. Se a fosse igual a 5, e b igual a 3, o resultado sería: $a-b=5-3=2$.

11. O signal $+$ chama-se tambem signal positivo, e o signal $-$
chama-se signal negativo. Toda a quantidade algebrica deve ser pre-
cedida por um destes signaes; a quantidade que leva o signal $+$,
chama-se **quantidade positiva**, e a que leva o signal $-$, chama-se
quantidade negativa. Quando o primeiro termo de uma expres-
são não tiver signal algum, subentende-se o signal $+$. Assim, $a-b$
quer dizer $+a-b$.

12. Duas quantidades teem signaes iguaes, quando ambos os signaes são positivos ou ambos negativos. Teem signaes differentes, quando um é positivo e outro negativo. Assim, as quantidades $+a$ e $+b$ ou $-a$ e $-b$ teem signaes iguaes; mas $+a$ e $-b$ teem signaes differentes.

13. O signal $\times$, escripto entre duas quantidades, mostra que a primeira deve ser multiplicada pela segunda. Assim, $a\times b$, que se

lê: *a multiplicado por b*, quer dizer que a quantidade representada pela lettra a deve ser multiplicada pela quantidade representada por b; de sorte que se a lettra a fosse igual a 4, e b igual a 5, o resultado seria $a\times b=4\times5=20$.

14. Representa-se o producto de duas ou mais lettras, escrevendo-se essas lettras unidas umas ás outras, como $a\times b=ab$ $b\times c\times d=bcd$.

Representa-se tambem o producto, escrevendo-se as lettras separadas por um ponto, como $b\times c\times d=b.c.d$; mas este modo está cahindo em desuso, porque se confunde com outras expressões algebricas.

15. As quantidades que devem ser multiplicadas chamam-se **factores.** Se o factor é um numero, chama-se **factor numeral,** isto quer dizer representado por um numero. Se o factor é uma lettra, chama-se **factor litteral,** isto quer dizer representado por uma lettra. Assim, $2\times a\times b\times c$ são quatro factores que, multiplicados, dão o producto $2abc$. O factor 2 é factor numeral e a, b e c são factores litteraes.

16. Seja qual for a ordem em que escrevermos as lettras de um producto, o resultado será sempre o mesmo. Assim, $a\times b\times c=abc$; $b\times c\times a=bca$; $c\times a\times b=cab$. Ora, abc, bca e cab são quantidades iguaes, como vamos provar na seguinte

Illustração. Se dermos á lettra a o valor de 2; a b o valor de 3, e a c o valor de 4, teremos nas tres ordens de factores abc, bca e cab o mesmo producto, como vemos ao lado.

$$abc=2\times3\times4=24$$
$$bca=3\times4\times2=24$$
$$cab=4\times2\times3=24$$

Para haver uniformidade no modo de exprimir um producto, escrevem-se sempre as lettras na ordem alphabetica; assim, o producto de $c\times a\times d\times b=abcd$.

Nota. O signal $\times$ é quasi sempre omittido em Algebra; pois em lugar de se escrever $a\times b$, escreve-se logo o producto que é ab.

17. O signal $\div$, escripto entre duas quantidades, mostra que a primeira quantidade deve ser dividida pela segunda. Assim, $a\div b$, que se lê: *a dividido por b*, quer dizer que a quantidade representada pela lettra a deve ser dividida pela quantidade representada por b. Se a lettra a fosse igual a 6, e b igual a 2, o resultado seria $a\div b=6\div2=3$.

18. Em algebra, indica-se o quociente na fórma de uma fracção, escrevendo o divisor debaixo do dividendo, como $a\div b=\frac{a}{b}$. Omitte-se sempre o signal da divisão, e escreve-se logo o quociente $\frac{a}{b}$ que tambem se lê: *a dividido por b*.

19. O signal $>$, escripto entre duas quantidades, mostra que uma quantidade é maior do que a outra. A abertura do signal mostra a quantidade maior. Assim, $a>b$, que se lê: *a maior do que b*, quer dizer que a quantidade representada pela lettra a é maior do que a representada pela lettra b; assim tambem a expressão $c<d$, quer dizer que c é menor do que d. Sendo c igual a 4, e d igual a 7, o resultado será $4<7$.

Quando não se sabe qual é a quantidade maior de uma desigualdade, escrevem-se dois signaes em sentido contrario, como $a><b$, que se lê: *a* desigual a *b*, e que quer dizer *a* maior ou menor que *b*.

Exercicios sobre os symbolos algebricos

20. Damos em seguida alguns exercicios sobre os symbolos algebricos para familiarizarmos os discipulos com o uso das lettras, e o emprego dos signaes.

Nestes exercicios daremos ás lettras a, b, c e d os seguintes valores:

$$a=2, \quad b=3, \quad c=4, \quad d=6.$$

Problema. Qual é o valor de $a+4b-2c$?

Solução. $a=2$; $4b=4\times3=12$; e $2c=2\times4=8$. Então o valor de $a+4b-2c$ é $2+12-8=6$.

Operação
$a+4b-2c$
$2+12-8=6$

Achar o valor das seguintes expressões:

1.	$3a+b+c$.	Resp. 13	5.	$2d+c-5a$.	Resp. ?
2.	$4a+2b+c$.	» 18	6.	$8+c-2b$.	» ?
3.	$a+3b+d$.	» 17	7.	$3a+3b+3c$.	» ?
4.	$c+20-d$.	» 18	8.	$2c-d+15$.	» ?

Problema. Qual é o valor da expressão $a+bc+2d$?

Solução. $a=2$; $bc=3\times4=12$, e $2d=2\times6=12$. Então o valor de $a+bc+2d$ é $2+12+12=26$.

Operação
$a+bc+2d$
$2+12+12=26$

Achar o valor das seguintes expressões:

9.	$2ab+5c-d$.	Resp. 26	13.	$ac+d-a$.	Resp. ?
10.	$5bc+d-2ab$.	» 54	14.	$bd+c-d$.	» ?
11.	$ab+bc+cd$.	» 42	15.	$ab+bc-ac$.	» ?
12.	$b+2ab-c$.	» 11	16.	$2cd+5ab$.	» ?

Problema. Qual é o valor da expressão $a+2b+\frac{d}{b}$?

Solução. $a=2$; $2b=2\times3=6$, e $\frac{d}{b}=\frac{6}{3}=2$
O valor desta expressão é $2+6+2=10$

Operação
$a+2b+\frac{d}{b}$
$2+6+2=10$

Achar o valor das seguintes expressões:

17.	$a+\frac{d}{a}+d$	Resp. 11	21.	$ab+c+\frac{6}{3}$.	Resp. ?
18.	$2b+\frac{d}{b}-a$.	» 6	22.	$dc-a+\frac{d}{c}$.	» ?
19.	$\frac{c}{a}+\frac{d}{b}+6$.	» 10	23.	$\frac{d}{c}+\frac{d}{a}+\frac{c}{a}$.	» ?
20.	$ad+ab+\frac{d}{a}$.	» 21	24.	$a+\frac{ad}{c}$.	» ?

Nota. É necessario que o discipulo comprehenda que as lettras a, b, c e d não representam respectivamente só os valores, 2, 3, 4 e 6; ellas podem representar qualquer valor segundo os dados de um problema.

Definições de alguns termos algebricos

21. Vamos agora definir alguns termos algebricos que os discipulos precisam conhecer, e guardaremos a definição dos outros para os seus respectivos logares.

22. Coefficiente é um numero prefixo a uma quantidade representada por lettras para mostrar quantas vezes essa quantidade deve ser tomada. Assim, em $4x$, o coefficiente é 4, e mostra que a lettra x deve ser tomada quatro vezes que são $x+x+x+x=4x$.

O coefficiente pode ser um numero ou uma lettra; se é um numero, chama-se **coefficiente numeral**; se é uma lettra, chama-se **coefficiente litteral.** Assim, na quantidade ay, a lettra a é o coefficiente de y, porque mostra que y tem de ser tomado a vezes. Se a for igual a 5, então y será tomado 5 vezes.

O coefficiente escreve-se sempre antes das lettras que representam uma quantidade, como $8xy$, $16abcx$, etc.

23. Quando nenhum coefficiente numeral estiver prefixo a uma quantidade algebrica, subentende-se sempre o coefficiente 1; pois x é o mesmo que $1x$; bcx é o mesmo que $1bcx$.

24. Potencia de uma quantidade é o producto dessa quantidade multiplicada por si mesma, uma ou mais vezes.

Quando uma quantidade é tomada duas vezes como factor, o producto chama-se **quadrado** ou **segunda potencia** dessa quan-

tidade; quando é tomada tres vezes como factor, o producto chama-se **cubo** ou **terceira potencia**; quando é tomada quatro vezes como factor, chama-se **quarta potencia**, etc. Assim,

A segunda potencia de 2 é 4, porque $2\times2=4$.
A terceira potencia de 2 é 8, porque $2\times2\times2=8$.
A segunda potencia de a é aa, porque $a\times a=aa$.
A terceira potencia de a é aaa, porque $\times a\times a\times a=aaa$.
A quarta potencia de a é $aaaa$, porque $a\times a\times a\times a=aaaa$.

25. Expoente ou exponente é o numero escripto no alto direito de uma quantidade para mostrar a que grau de potencia ella deve ser elevada, ou quantas vezes ella deve ser tomada como factor.

Em lugar de repetirmos muitas vezes a mesma lettra, para exprimir o grau de uma potencia, empregamos, por abreviatura, um expoente para esse fim. Assim,

$2\times2=2^2$.	$a\times a=aa=a^2$.
$2\times2\times2=2^3$.	$a\times a\times a=aaa=a^3$.
$2\times2\times2\times2=2^4$.	$a\times a\times a\times a=aaaa=a^4$.
$2\times2\times2\times2\times2=2^5$.	$a\times a\times a\times a\times a=aaaaa=a^5$.

Os algarismos 2, 3, 4 e 5, escriptos no alto direito do algarismo 2 e da lettra a, são os seus expoentes.

26. Os symbolos que representam as potencias leem-se do seguinte modo:

x^4 lê-se: x elevado á quarta potencia, ou a quarta potencia de x.
x^m lê-se: x elevado á potencia m.
x° lê-se: x elevado á potencia zero.

Nota. No sentido rigoroso da palavra, entende-se por *expoente* o que expõe alguma cousa em juizo; e por *exponente* entende-se o algarismo ou lettra que posta á direita e um pouco acima de uma quantidade, exprime a potencia a que esta é elevada; era assim que antigamente se falava nas aulas, e é esta a definição que todos os diccionarios antigos dão destes termos. Mas modernamente o vocabulo *expoente* generalizou-se como termo algebrico e ficou em uso geral no ensino das mathematicas.

Observação. É necessario que o discipulo comprehenda perfeitamente a differença entre **coefficiente** e **expoente.** Em $3x$, 3 é cofficiente, e mostra que x deve ser tomado 3 vezes como parcella. Em x^3, 3 é expoente, e mostra que x deve ser tomado 3 vezes como factor em uma multiplicação.

Dando-se a x o valor de 5, podemos facilmente notar a differença numerica destas duas expressões:

$$3x=x+x+x=5+5+5=15.$$
$$x^3=x\times x\times x=5\times5\times5=125.$$

27. Raiz de uma quantidade é o factor que multiplicado por si uma ou mais vezes, produz essa quantidade.

A raiz chama-se **quadrada**, quando é tomada duas vezes como factor; chama-se **cubica**, quando é tomada tres vezes como factor; chama-se **quarta raiz**, quando é tomada quatro vezes como factor, e assim por diante. De sorte que,

A raiz quadrada	de 25 é 5,	porque.....	$5\times5=25$.
A raiz cubica	de 125 é 5,	porque.....	$5\times5\times5=125$.
A raiz quadrada	de a^2 é a,	porque.....	$a\times a=a^2$.
A raiz cubica	de a^3 é a,	porque.....	$a\times a\times a=a^3$.
A quarta raiz	de a^4 é a,	porque.....	$a\times a\times a\times a=a^4$.

Nestes exemplos vê-se que 5 é a raiz quadrada de 25, e a raiz cubica de 125; a é a raiz quadrada de a^2, a raiz cubica de a^3, e a quarta raiz de a^4, etc.

28. Signal radical é a figura $\sqrt{\ }$, que se escreve sobre uma quantidade para mostrar que se deve extrahir della a raiz indicada pelo indice.

29. Indice da raiz é o numero que, escripto no angulo do signal radical, mostra o grau da raiz que deve ser extrahida. Assim,

$\sqrt[2]{9}$ lê-se: a raiz quadrada de 9.
$\sqrt[3]{27}$ lê-se: a raiz cubica de 27.
$\sqrt[2]{a}$ lê-se: a raiz quadrada de a.
$\sqrt[3]{xy}$ lê-se: a raiz cubica de xy.
$\sqrt[4]{abc}$ lê-se: a quarta raiz de abc.

Os numeros 2, 3 e 4, escriptos nos angulos dos signaes radicaes, são os indices das raizes.

Nota. Na raiz quadrada, supprime-se o indice 2, e escreve-se simplesmente o signal radical; assim, $\sqrt{ax}$ lê-se: raiz quadrada de ax.

O signal $\sqrt{\ }$ é uma das fórmas antigas da lettra r, inicial da palavra raiz.

Exercicios sobre os symbolos das potencias

30. Damos em seguida alguns exercicios para os discipulos comprehenderem o valor dos symbolos algebricos que representam as diversas potencias.

Nestes exercicios daremos a x o valor de 2; a y, o valor de 3, e a z, o valor de 4.

Problema. Qual é o valor de x^2+y^3?

Solução. Se $x=2$, então $x^2=2\times2=4$. Se $y=3$, então $y^3=3\times3\times3=27$. O valor das duas potencias é $4+27=31$.

Operação

$$x^2=x\times x \quad =2\times2 \quad = 4$$
$$y^3=y\times y\times y=3\times3\times3=27$$
$$x^2\times y^3=31$$

Achar o valor numerico das seguintes potencias:

		Resp.			Resp.
1.	x^3+y^2.	17	6.	$x+2y+z^2$.	?
2.	x^2+y^3-z.	» 27	7.	$3x^2+5y+z^2$.	» ?
3.	x^3-y+z^2.	» 21	8.	y^3+z^2-5x.	» ?
4.	$x+y^2+2z^2$.	» 43	9.	$2z^3+y+x$.	» ?
5.	x^4-y-z.	» 9	10.	$z+y^2+z^3$.	» ?

Expressões algebricas

31. Chama-se **expressão algebrica** uma quantidade representada por meio de symbolos algebricos. Assim, $5a$ é uma expressão algebrica que mostra que a quantidade a deve ser tomada 5 vezes.

$2a+3b$ é uma expressão algebrica que mostra que 3 vezes a quantidade b, deve ser addicionada a 2 vezes a quantidade a.

$3a^2-5ab$ é uma expressão algebrica que mostra que de 3 vezes o quadrado de a, deve subtrahir-se 5 vezes a quantidade ab.

32. Monómio é uma quantidade algebrica que não está unida a outra quantidade pelos signaes de sommar, subtrahir, igualdade ou desigualdade $+$, $-$, $=$ ou $>$. Assim, $3a$, $2xy$ e abx^2y são monomios.

O monomio é tambem chamado **termo** ou **quantidade simples.**

33. Em um monomio distinguem-se o coefficiente e a parte litteral. O coefficiente já foi definido no n.° **22**, e a parte litteral são as lettras contidas no monomio. Assim, em $8xyz$, 8 é o coefficiente, e xyz é a parte litteral.

34. Polynómio é uma quantidade algebrica composta de dois ou mais termos unidos pelos signaes $+$ ou $-$. Assim, $a+b$, $ab-2x+5y^2$ são polynomios.

Se um polynomio tem dois termos, chama-se tambem **binomio**; se tem tres termos, chama-se tambem **trinomio.** Assim, $2a+b$ é um binomio; e $ab-x+y$ é um trinomio.

Nota. Monomio é a expressão algebrica que tem um só termo; binomio é a expressão algebrica que tem dois termos; trinomio é a expressão que tem tres termos, e polynomio, rigorosamente fallando, é a expressão algebrica que tem mais de tres termos. Mas, para facilitar os enunciados algebricos, dá-se geralmente o nome de polynomio a toda a expressãc que tem mais de um termo.

35. Cada termo de um polynomio deve ser precedido por um dos signaes $+$ ou $-$, exceptua-se, porém, o primeiro termo que, quando é positivo, supprime-se-lhe, por abreviatura, o signal $+$, como $3ax+2bc-xy$.

36. Se um termo, precedido pelos signaes $+$ ou $-$ é combinado com outras lettras pelos signaes $\times$ ou $\div$, estas lettras fazem parte desse termo, e a elle devem ser unidas pela operação indicada. Assim, $4+3\times6$ quer dizer que ao numero 4 devemos juntar, não 3 sómente, mas o producto de 3 multiplicado por 6, que é $3\times6=18$; e por isso esta expressão tem só dois termos que são $4+18$. Do mesmo modo $a+b\times c$ tem só dois termos que são $a+bc$; $x+a-b\div c$ tem só tres termos que são $x+a-\frac{b}{c}$.

Os discipulos reduzirão as seguintes expressões aos seus verdadeiros termos:

		Respostas			Respostas
1.	$50+5\times2$.	$50+10$	7.	$4a\div2b+c$.	?
2.	$20-3\times2$.	$20-6$	8.	$50\div6+ab$.	?
3.	$ac+4b\times2$.	$ac+8b$	9.	$b-c\times d$.	?
4.	$5b-6b\div3$.	$5b-\frac{6b}{3}$	10.	$ab-5c+d\times x$.	?
5.	$3x-8y\div a$.	$3x-\frac{8y}{a}$	11.	$x\times y\times z+ab$.	?
6.	$6b+7c\times x$.	$6b+7cx$	12.	$25-16ab\div2$.	?

37. Mudando-se em um polynomio a ordem de seus termos, conservando cada termo o seu respectivo signal, não se altera o seu valor. Assim, a expressão $a+b-c$ é igual a $a-c+b$ ou a $b+a-c$.

Illustração. Se dermos á lettra a o valor numerico de 5; a b, o valor de 4, e a c o valor de 3, teremos nas tres expressões resultados iguaes, como vemos nas igualdades que estão ao lado.

$$a+b-c=5+4-3=6.$$
$$a-c+b=5-3+4=6.$$
$$b+a-c=4+5-3=6.$$

38. Cada uma das lettras de que se compõe um termo chama-se **dimensão** do termo, e o numero de lettras, chama-se **grau** do termo. O coefficiente numeral não entra como dimensão. Assim,

$2a$ é um termo de uma dimensão ou do primeiro grau, porque tem uma só lettra, que é a.

ax é um termo de duas dimensões ou do segundo grau, porque tem duas lettras que são a e x.

$5axy$ é um termo de tres dimensões ou do terceiro grau.

a^2b^2 é um termo de quatro dimensões ou do quarto grau, porque contém quatro lettras que são a, a, b e b. (n.° **25.**)

E' evidente que o grau de um termo é igual á somma dos expoentes das lettras que constituem esse termo.

39. Quando uma lettra não tem expoente, subentende-se sempre o expoente 1; pois a é o mesmo que a^1; x é o mesmo que x^1, e a axy^2 é o mesmo que $a^1x^1y^2$.

40. Polynómio homogeneo é o que tem todos os seus termos com o mesmo grau. Assim, x^3+2xy^2+axy é um polynómio homogeneo, porque todos os seus termos são do terceiro grau.

41. Quantidades semelhantes são as que se compõem das mesmas lettras e dos mesmos expoentes. Assim, $2abc^2$, $3abc^2$ e $-abc^2$ são quantidades semelhantes porque podem ser incluidas em uma só quantidade, que é $2abc^2+3abc^2-abc^2=4abc^2$.

42. Quantidades dessemelhantes são as que teem lettras ou expoentes differentes, como $3ab^2$, $3a^2b$ e $3ax$.

43. Um polynómio que tem termos semelhantes, póde ser simplificado, isto é, póde ser reduzido o numero dos seus termos, porque dois ou mais termos semelhantes podem ser reduzidos a um só.

Assim, o polynomio $5ab+2x+4x$ póde ser reduzido a dois termos, que são $5ab+6x$, porque $2x+4x=6x$.

O polynomio $3ac+2ac+6ab-2ab$ póde tambem ser reduzido a dois termos que são $5ac+4ab$, porque $3ac+2ac=5ac$, e $6ab-2ab=4ab$. Esta reducção é um dos casos da addição algebrica, da qual adiante trataremos.

44. Reciproca de uma quantidade é a unidade dividida por essa quantidade. Assim, a reciproca de 3 é $\frac{1}{3}$; a reciproca de ab é $\frac{1}{ab}$; a reciproca de $a+x$ é $\frac{1}{a+x}$, etc.

Modo de enunciar as expressões algebricas

45. Qualquer quantidade algebrica representada por symbolos póde ser facilmente enunciada com clareza, por meio de palavras. Assim,

$ac+\frac{b}{d}$ lê-se: « o producto de ac mais o quociente de b dividido por d » ou simplesmente: « ac mais b dividido por d. »

$a^2+2ab+b^2$ lê-se: « a quadrado mais $2ab$ mais b quadrado. »

46. Quando duas ou mais quantidades teem um divisor commum, ou estão incluidas debaixo de um signal radical, ligam-se todas com a conjuncção e. Assim,

$a+\frac{b}{c}$ lê-se: « a mais b dividido por c. » $\frac{a+b}{c}$ lê-se: « a somma de a mais b dividida por c, ou a e mais b dividido por c. »

Se omittirmos a conjuncção *e*, enunciaremos a expressão antecedente. $\frac{2xy}{\sqrt{a-b}}$ lê-se: « $2xy$ dividido pela raiz quadrada de a e menos b. » Se omittirmos a conjuncção, o divisor será $\sqrt{a}-b$.

Lêr as seguintes expressões algebricas:

1. $bx-3ay^2$.	4. $4a^2b^3c^4-\frac{4a-2b}{xy}$.
2. $a^2bc-2abc+6x$.	5. $18xy^3+\sqrt{a^2-b^2}$.
3. $\frac{a+c}{c}+\frac{abc}{20}$.	6. $\frac{18+ab}{x+y}+\frac{a^2+b}{\sqrt{x-y}}$.

ADDIÇÃO

47. Addição em Algebra é a operação que tem por fim reunir duas ou mais quantidades algebricas em uma só expressão, chamada somma.

48. Na addição algebrica ha tres casos a considerar que são:

1° *Quando as quantidades são semelhantes e teem signaes iguaes.*

2° *Quando as quantidades são semelhantes, mas teem signaes differentes.*

3° *Quando todas as quantidades não são semelhantes.*

Nota. Para evitar difficuldades, o discipulo recordará os dois pontos seguintes:

1° As quantidades que não tiverem signal prefixo, são consideradas positivas, isto é, com o signal +. (n.° **11**).

2° As quantidades que não tiverem coefficiente, subentende-se o coefficiente 1; assim, ab quer dizer $1ab$. (n.° **23**).

Primeiro caso da addição

49. Quando as quantidades são semelhantes, e teem signaes iguaes, addicionam-se os coefficientes, e á somma junta-se a parte litteral com o signal das parcellas. Neste caso procede-se justamente como em Arithmetica.

Problema. Qual é a somma das quantidades 3 annos, 5 annos, 4 annos e 1 anno?

Solução. Sommando as quatro quantidades $3+5+4+1$, temos 13, isto é, 13 annos.

Substituindo agora a palavra annos pela lettra a, é evidente que a somma será $13a$. Se as quatro quantidades, em lugar do signal + subentendido, tivessem o signal —, a somma seria $-13a$, porque a somma deve exprimir o resultado de todas as suas parcellas.

3 annos,	$3a$
5 annos,	$5a$
4 annos,	$4a$
1 anno,	a
13 annos.	$13a$

Operar as seguinte addições:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)
$+5$	-4	$2a$	$2b$	$4ab$	$2x-5$
$+3$	-3	$3a$	$6b$	$8ab$	$5x-3$
$+4$	-5	$5a$	$4b$	ab	$x-8$
$+2$	-4	$8a$	$5b$	$6ab$	$4x-2$
$+14$	-16	$18a$	$17b$	$19ab$	$12x-18$

(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)	(12.)
$3ac$	$-2bx$	$5abx^2$	$7a+8$	$8x-5$	$2a-b$
$15ac$	$-3bx$	$3abx^2$	$5a+3$	$6x-3$	$5a-2b$
$9ac$	$-bx$	$2abx^2$	$a+4$	$2x-6$	$a-5b$
$6ac$	$-4bx$	abx^2	$2a+1$	$3x-4$	$3a-2b$
$2ac$	$-6bx$	$4abx^2$	$4a+6$	$x-2$	$5a-4b$

50. Uma somma algebrica não é em todos os casos igual a uma somma em Arithmetica, como no caso precedente.

Em Arithmetica, como as quantidades que se addicionam são sempre positivas, a somma deve ser sempre maior do que qualquer das suas parcellas; assim, na operação $3+4+8=15$, a somma 15 é maior do que qualquer das parcellas 3, 4 ou 8. Em Algebra, porém, como temos de addicionar tambem quantidades negativas, a somma poderá ser algumas vezes nulla ou numericamente inferior á somma das quantidades positivas, como vamos ver no caso seguinte:

Segundo caso da addição

51. Quando as quantidades são semelhantes, mas tem signaes differentes, isto é, quando umas teem o signal +, e outras teem o signal —, addicionam-se os coefficientes dos termos positivos; depois addicionam-se os coefficientes dos termos negativos; acha-se a differença das duas sommas, e, se a somma maior for positiva, prefixa-se á differença o signal +, e, se a somma maior for negativa, prefixa-se á differença o signal —, e junta-se-lhe a parte litteral.

Problema. Achar a somma das seguintes quantidades: $+3a$, $+5a$, $-4a$, $+6a$ e $-2a$.

Solução. A somma das quantidades positivas é $14a$; a somma das quantidades negativas é $6a$; a differença das duas sommas é $14a-6a=8a$. Ora, como a somma maior é a positiva, prefixa-se á differença o signal + e ficará $+8a$ que é a somma das cinco parcellas.

$$\begin{array}{r} +3a \\ +5a \\ -4a \\ +6a \\ -2a \\ \hline +8a \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 3a\ \ -4a \\ +\ 5a\ \ -2a \\ +\ 6a \qquad \\ \hline +14a\ \ -6a = 8a \end{array}$$

Demonstração. Para comprehendermos este caso, figuremos um cofre onde guardamos dinheiro. As quantias que recolhemos no cofre são positivas, as que tiramos são negativas, e a somma de todas mostra o que existe no cofre. Ora, como cada quantia negativa annulla uma quantia positiva semelhante ou de igual valor, segue-se que, se a somma das quantias negativas fosse igual á das positivas, o resultado da addição seria nullo ou zero; mas como, no caso presente a somma das quantidades negativas é só $6a$, annulla $6a$ em $14a$, e o resultado da addição é $8a$. Portanto, a somma destas cinco quantidades é $+8a$.

52. Este caso da addição é uma simples reducção de polynomios; (n.° **43**), pois, se escrevermos todos os termos desta addição em fórma de um polynomio, e effectuarmos a reducção, o resultado será o mesmo, como $3a+5a-4a+6a-2a=8a$. Portanto, não é rigorosamente necessario escrever os termos algebricos em columna para se effectuar a addição; podemos tambem chegar ao mesmo resultado, reduzindo os termos quando elles estão em fórma de um polynomio. A columna tem a vantagem de tornar mais intelligivel e claro o ensino desta operação.

53. Para completarmos este caso, vamos operar uma addição, na qual a somma será menor do que zero, isto é, será uma quantidade negativa.

Problema. Sommar as seguintes quantidades: $+5a$, $+3a$, $-10a$, $+2a$ e $-6a$.

Solução. A somma das quantidades positivas é $10a$; a somma das quantidades negativas é $16a$, e a differença entre as duas sommas é $6a$. Ora, como a somma maior é negativa, a differença é tambem negativa, e por isso a somma é $-6a$.

$$\begin{array}{r} +\ 5a \\ +\ 3a \\ -10a \\ +\ 2a \\ -\ 6a \\ \hline -\ 6a \end{array} \qquad \begin{array}{r} -10a \\ -\ 6a \\ \hline -16a \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 5a \\ +\ 3a \\ +\ 2a \\ \hline +10a = -6a \end{array}$$

Demonstração. Para comprehendermos este processo, figuremos ainda um cofre onde guardamos o nosso dinheiro, e depositamos tambem o dinheiro de uma pessoa, que deposita e retira diversas quantias. As quantias que ella deposita são positivas, e as que retira, são negativas. Ella entrou com $5a+3a+2a$ $10a$, e retirou $16a+6a=16a$; se ella tivesse retirado sómente $10a$, o resultado seria nullo ou zero, porque em nada alteraria os fundos que tinhamos no cofre; mas como ella tirou $16a$, isto é, $6a$ mais do que poz, o resultado será $-6a$, isto é, ficará um desfalque de $6a$. Portanto, a somma de $+5a+3a-10a+2a-6a=-6a$.

Operar as seguintes addições :

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
-2	$+8$	$+\ 3a$	$+5abx$	$ab+\ 8$
$+7$	-4	$+10a$	$-3abx$	$3ab+\ 1$
-3	$+9$	$-12a$	$-\ abx$	$-2ab+\ 5$
$+4$	-7	$-\ 6a$	$-5abx$	$9ab-15$
-1	-6	$+\ 2a$	$+2abx$	$-3ab-\ 7$
$+5$	0	$-\ 3a$	$-2abx$	$8ab-\ 8$

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)
$6ab$	$-\ bxy$	$3ab-6$	$a+\ b$	$a+\ b-2c$
$-2ab$	$-7bxy$	$-2ab+7$	$-a+\ b$	$-\ a+2b-3c$
$-\ ab$	$8bxy$	$-6ab-2$	$3a-2b$	$-3a-\ b+5c$
$5ab$	bxy	$5ab-1$	$-a+3b$	$-\ a+3b-\ c$

11. Qual é a somma de $8a$ e $-5a$? Resp. $3a$.
12. Qual é a somma de $5a$ e $-8a$? » $-3a$.
13. Qual é a somma de $-7ax$, $3ax$, $6ax$ e $-ax$? » ax.
14. Qual é a somma de $4xy$, $2xy$ e $-6xy$? » 0.
15. Addicionar $4ac$, $3ac$, $7ac$, $-6ac$, $-2ac$, $9ac$ e $-17ac$. Resp. $-2ac$.
16. Addicionar $7a-5b$, $2a+3b$, $-7a-8b$ e $-a+9b$. Resp. $a-b$.
17. Achar a somma de $8ax-2by$, $-2ax+3by$, $3ax-4by$ e $-9ax+8by$. Resp. $5by$.
18. Achar a somma de $3ab-10x$, $-3ab+7x$, $3ab-6x$, $-ab+2x$ e $-2ab+7x$. Resp. 0.

Terceiro caso da addição

54. Quando alguns dos termos não são semelhantes, escrevem-se em columna os termos semelhantes, e os dessemelhantes escrevem-se adiante, e depois procede-se como nos dois casos precedentes.

Problema. Quanto sommam 2 centos, mais 3 centos e mais 4 duzias ?

Solução. Como 2 centos e 3 centos são quantidades semelhantes, escrevem-se em columna para facilitar a somma ; como 4 duzias é uma quantidade dessemelhante, escreve-se adiante ; a somma das tres quantidades é 5 centos e 4 duzias.

Se em logar de escrevermos as palavras centos e duzias, escrevermos c e d, o resultado será o mesmo, pois $2c+3c+4d=5c+4d$.

$$\begin{array}{l} 2\,centos \\ 3\,centos+4\,duzias \\ \hline 5\,centos+4\,duzias \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2c \\ 3c+4d \\ \hline 5c+4d \end{array}$$

Regra geral para a addição. *Escrevem-se os termos semelhantes em columnas, e adiante delles, os termos dessemelhantes com os seus respectivos signaes; addicionam-se os termos semelhantes que forem positivos, depois os que forem negativos, e a differença das duas sommas escreve-se debaixo da columna respectiva com o signal da somma maior e com a parte litteral, e accrescentam-se os termos dessemelhantes com os seus respectivos signaes.*

Operar as seguintes addições :

(1.)	(2.)	(3.)
$4a+5b-7c$	$3b+4x-y^2$	$5a+xy+m$
$3a-b+2c$	$5b+7x+3y^2$	$9a-5xy+7m$
$9a-2b-c$	$b-6x+4y^2$	$-6a+8xy-8m$
$-a+3b+4c$	$-4b+9x-8y^2$	$7a-9xy+9m$
$15a+5b-2c$		

(4.)	(5.)
$7x-9y+5z+3-g$	$8a+b$
$-x-3y-8-g$	$2a-b+c$
$-x+y-3z+1+7g$	$-3a+b+2d$
$-2x+6y+3z-1-g$	$-6b-3c+3d$

6. $6a+4c+3b-2a-3c-5b$. Resp. $4a-2b+c$.
7. $2ab+c$, $4ax-2c$, $12-2ax$, $6ab+3c-x$. Resp. $8ab+2ax+2c+12-x$.
8. $14a+x$, $13b-y$, $-11a+2y$, $-2a-12b+z$. Resp. $a+b+x+y+z$.
9. $-7b+3c$, $4b-2c+3x$, $3b-3c$, $2c-2x$. Resp. x.
10. $a-3b+4c-5d$, $3b-5c+6d-2a$, $5c-7d+4a-3b$, $7d-5a+6b-3c$. Resp. $-2a+3b+c+d$.
11. x^3-5x^2+6x-2, $3x^3-6x^2-15x+4$, x^3-8x^2-6x+4. Resp. $5x^3-19x^2-15x+6$.
12. $8ax-3cz^2$, $-5ax+5cz^2$, $ax+2cz^2$, $-4ax-4cz^2$. Resp. 0.
13. Qual é a somma de $3(a+b)$, $7(a+b)$ e $5(a+b)$?

Solução. As quantidades que estão fechadas por um parenthesis, são consideradas como um só termo, E' evidente que 3 vezes, mais 7 vezes, mais 5 vezes uma quantidade são iguaes a 15 vezes essa quantidade.

$$\begin{array}{r} 3(a+b) \\ 7(a+b) \\ 5(a+b) \\ \hline 15(a+b) \end{array}$$

14. Sommar $13(a+b)+15(a+b)-7(a+b)$. Resp. $21(a+b)$.
15. Achar a somma de $8c(x-y)$, $7c(x-y)$, $-5c(x-y)$, e $9c(x-y)$. Resp. $19c(x-y)$.
16. Achar a somma de $3a(b+x)$, $5a(b+x)$, $7a(b+x)$ e $-14a(b+x)$. Resp. $a(b+x)$.

SUBTRACÇÃO

55. Subtracção em Algebra é a operação que tem por fim achar a differença entre duas quantidades algebricas.

A quantidade da qual se tem de fazer a subtracção, chama-se **minuendo**; a quantidade que se tem de subtrahir, chama-se **subtrahendo**, e o resultado da operação, chama-se **differença algebrica.**

Em Algebra, bem como em Arithmetica, a somma do subtrahendo e da differença é igual ao minuendo.

Nota. A subtracção é uma operação muito simples em Arithmetica, mas um tanto difficil em Algebra, e por isso é necessario alguma attenção dos discipulos para elles poderem comprehender o modo analytico de resolver os seus diversos casos.

Em Arithmetica, como se opera só com quantidades positivas, a ideia da subtracção é sempre diminuição; em Algebra, porém, a differença entre duas quantidades póde ser numericamente maior do que ellas; assim, sendo $+a$ o minuendo, e $-a$ o subtrahendo, a differença entre $+a$ e $-a$ é $2a$.

Ha um modo muito simples de operar todos os casos da subtracção sem difficuldade alguma. Esse modo é *trocar o signal de todos os termos do subtrahendo, e depois sommar o minuendo e o subtrahendo;* e assim qualquer caso da subtracção ficará reduzido a uma simples addição algebrica.

Não é, porém, conveniente empregarmos esta regra sem primeiro comprehendermos a analyse de cada caso da subtracção, do contrario não poderemos ter uma idéa exacta desta operação algebrica.

Primeiro caso da subtracção

56. Quando os dois termos de uma subtracção são semelhantes e teem signaes iguaes, acha-se a differença entre os coefficientes e escreve-se em baixo com a parte litteral e o signal commum.

Problema. Qual é a differença entre $7ab$ e $4ab$?

Solução. Se de 7 laranjas tirarmos 4 laranjas restarão 3 laranjas; então é evidente que de $7ab$ subtrahindo $4ab$, restam $3ab$. A differença, pois, entre $7ab$ e $4ab$ é $3ab$. Este caso é igual á subtracção em Arithmetica.

Minuendo	$7ab$
Subtrahendo	$4ab$
Differença	$3ab$

Operar as seguintes subtracções :

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
10	-9	$5ac$	$-8abc^2$	$3a+8$
8	-2	ac	$-8abc^2$	$2a+7$
2	-7	$4ac$	0	$a+1$

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)
$18ab$	$30axy$	$-95y$	$3bx$	$18d-11$
$17ab$	$12axy$	$-81y$	$3bx$	$9d-9$

Segundo caso da subtracção

57. Em Algebra podemos tambem subtrahir uma quantidade numericamente maior, de outra menor, e se os signaes forem iguaes, o resultado será a differença das duas quantidades com o signal contrario.

Problema. Subtrahindo $8a$ de $6a$ quanto resta ?

Solução. Subtrahindo $6a$ de $6a$, restam 0 ou nada ; subtrahindo-se $7a$ de $6a$, resta $-a$, e subtrahindo $8a$ de $6a$, restam $-2a$.

	Subtracção	Addição
Minuendo	$+6a$	$+6a$
Subtrahendo	$+8a$	$-8a$
Resto	$-2a$	$-2a$

Demonstração. Para comprehendermos a analyse desta solução, figuremos que um homem, levando só 6$000, foi a uma loja, e alli comprou 8$000 de objectos ; ora, se elle tivesse despendido só 6$000, voltaria da loja sem dinheiro algum ; mas como gastou 8$000, voltou com 2$000 de menos, isto é, voltou com uma divida de 2$000, que ainda tem de pagar. Logo, 6$ — 8$ = — 2$. Trocando o cifrão pela lettra a, temos $6a-8a=-2a$.

Se mudarmos o signal do subtrahendo, e operarmos a addição algebrica, o resultado será o mesmo, como vemos na operação acima.

Operar as seguintes subtracções :

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
12	$-15a$	$25ax$	$-29ay$	$18x+23$
13	$-18a$	$36ax$	$-30ay$	$20x+25$
-1	$+3a$	$-11ax$	$+ay$	$-2x-2$

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)
33	$-26a$	$42bx$	$-17ay$	$24x+13$
44	$-36a$	$49bx$	$-18ay$	$22x+15$

Terceiro caso da subtracção

58. Quando os dois termos de uma subtracção são quantidades dessemelhantes, exprime-se a sua differença escrevendo as duas quantidades separadas pelo signal —.

Problema. Da quantidade a subtrahir a quantidade b.

Solução. Desde que não sabemos o numero das unidades representadas pela quantidade a, nem pela quantidade b, é claro que só podemos indicar a sua differença pela expressão $a-b$.

Os dois termos desta subtracção são ambos positivos; se porém trocarmos o signal do subtrahendo pondo —, e depois operarmos a addição algebrica, o resultado será tambem $a-b$.

Subtracção	Addição
a	$+a$
b	$-b$
$a-b$	$a-b$

Operar as seguintes subtracções :

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
Minuendo	x	a	$2ab$	$a+b$	$2a-5$
Subtrahendo	y	8	$3xy$	c	y
Differença	$x-y$	$a-8$	$2ab-3xy$	$a+b-c$	$2a-5-y$

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)
$18y$	$4b+x$	$ab-9$	$a+b+c$	$25+x^2$	$3x^2+20$
$17x$	$3y$	xy	d	$18a$	$5x$

Quarto caso da subtracção

59. Quando de uma quantidade positiva se subtrahe uma quantidade negativa semelhante, o resultado será igual á somma das duas quantidades.

Tomando, por exemplo, o numero 10, e subtrahindo delle os numeros 2, 1, 0, —1, —2, etc., teremos

Minuendo	10	10	10	10	10
Subtrahendo	2	1	0	—1	—2
Resto	8	9	10	11	12

Subtrahindo 2 de 10 resta 8, subtrahindo 1 resta 9; subtrahindo 0 resta 10; subtrahindo —1 resta 11; subtrahindo —2 resta 12, porque o subtrahendo negativo augmenta o valôr do minuendo.

60. Para comprehendermos melhor este resultado vamos resolver o seguinte problema:

Problema. Em certo dia o thermometro marcou 3 graus de calor, e no dia seguinte marcou 2 graus abaixo de zero; qual foi a differença de temperatura nestes dois dias?

+	3
+	2
+	1
ZERO	
—	1
—	2

Solução. Os graus acima de zero são positivos, e os graus abaixo de zero são negativos. Ora, é evidente que para achar a differença de calor entre + 3 graus e — 2 graus é necessario sommar os numeros 3 e 2, que fazem 5. Logo a differença entre $+3g.$ e $-2g.$ é igual a $+5g.$

$$\begin{array}{r} +3 \text{ g.} \\ -2 \text{ g.} \\ \hline +5 \text{ g.} \end{array}$$

61. Para este caso ficar perfeitamente claro, vamos resolver mais o seguinte problema:

Problema. Da quantidade a subtrahindo a quantidade $b-c$, quanto resta?

Solução. Se subtrahirmos b de a, o resultado será $a-b$, como vimos no 3º caso; mas o subtrahendo não é b, mas sim uma quantidade menor do que b, porque é $b-c$; logo para obtermos o verdadeiro resultado, devemos tirar c de b e juntal-o á differença $a-b$, que então ficará $a-b+c$. Se agora trocarmos os signaes do subtrahendo e operarmos a addição, o resultado será o mesmo.

Subtracção	Addição
a	a
$b-c$	$-b+c$
$a-b+c$	$a-b+c$

Demonstração. Por meio de numeros podemos comprehender facilmente este resultado, Se subtrahirmos 5 de 9, o resultado será 9—5=4; mas se subtrahirmos a quantidade de 5—3 da quantidade 9, o resultado não será 9—5, porque o subtrahendo não é 5, mas sim 5 menos 3, e por isso temos de subtrahir 3 de 5 para juntal-o a 9—5, e então, teremos o verdadeiro resto, que é 9—5+3=7. substituindo a lettra a por 9, a lettra b por 5, e a lettra c por 3, teremos :

a	$=9$	$=9$
$b-c$	$=5-3$	$=2$
$a-b+c$	$=9-5+3$	$=7.$

Todos os casos da subtracção algebrica são resolvidos facilmente pela seguinte regra geral:

Regra geral da subtracção. *Escreve-se o subtrahendo debaixo do minuendo, de sorte que os termos semelhantes fiquem uns debaixo dos outros.*

Consideram-se todos os termos do subtrahendo com o signal mudado: o que tiver o signal +, ficará com o signal —, e o que tiver o signal —, ficará com o signal +.

Addicionam-se depois o minuendo e o subtrahendo segundo a regra da addição algebrica, e o resultado será o resto da subtracção.

Nota. A regra ficará perfeitamente comprehendida, operando o seguinte exemplo por subtracção e depois por addição, trocando os signaes do subtrahendo, conforme está preceituado na regra :

	Subtracção	Addição
Minuendo	$5a+3b-c$	$5a+3b-c$
Subtrahendo	$2a-2b-3c$	$-2a+2b+3c$
Differença	$3a+5b+2c$	$3a+5b+2c$

Operar as seguintes subtracções :

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
$8-5$	$3ax-2y$	$4cx^2-3by^2$	$8xyz+3az-8$
$-2+3$	$2ax+3y$	$2cx^2-3by^2$	$5xyz-3az+8$
$10-8$	$ax-5y$	$2cx^2 \quad 0$	$3xyz+6az-16$

(5.)	(6.)	(7.)	(8.)
$7x+4y$	$3a-2b$	$6ax-4y^2+3$	$5a+2x-2y$
$6x+\ y$	$3a-3b$	$3ax-6y^2+2$	$2a+\ x+4y-z$

	Resp.
9. De 14 subtrahir $ab-5$.	$19-ab$.
10. De $a+b$ subtrahir a.	» b.
11. De a subtrahir $a+b$.	» $-b$.
12. De x subtrahir $x-5$.	» 5.
13. De $3ax$ subtrahir $2ax+7$.	» $ax-7$.
14. De $x+y$ subtrahir $x-y$.	» $2y$.
15. De $x-y$ subtrahir $y+x$.	» $-2y$.
16. De $x-y$ subtrahir $y-x$.	» $2x-2y$.
17. De $x+y+z$ subtrahir $x-y-z$.	» $2y+2z$.
18. De $5x+3y-z$ subtrahir $4x+3y+z$.	» $x-2z$.
19. De a subtrahir $-a$.	» $2a$
20. De $8a$ subtrahir $-3a$.	» $11a$.
21. De $5b$ subtrahir $+11b$.	» $-6b$.
22. De $3a$ subtrahir $-2b$.	» $3a+2b$.
23. De $-9a$ subtrahir $3a$.	» $-12a$.
24. De $-7a$ subtrahir $-7a$.	» 0.
25. De $-19a$ subtrahir $-2a$.	» $-17a$.
26. De -9 subtrahir -16.	» 7.
27. De 12 subtrahir -8.	» 20.
28. De -14 subtrahir -5.	» -9.
29. De $3a-2b+6$ subtrahir $2a-7b-3$.	» $a+5b+9$.
30. De $32a+3b$ subtrahir $5a+17b$.	» $27a-14b$.
31. De $5(x+y)$ subtrahir $2(x+y)$.	» $3(x+y)$.
32. De $3a(x-z)$ subtrahir $a(x-z)$.	» $2a(x-z)$.
33. De $13a-2b+9c-3d$ subtrahir $8a-6b+9c-10d$.	» $5a+4b+7d$.

Applicação do parenthesis na addição e na subtracção

62. Pelo que acabamos de expôr nas operações da addição e subtracção, fica evidente que os signaes + e — teem duas significações muito distinctas, que são:

1ª *Indicar simplesmente as operações de addição e subtracção.*

2ª *Mostrar a natureza positiva ou negativa das quantidades.*

63. Se subtrahirmos a quantidade b da quantidade a, o resultado será $a-b$; neste exemplo, o signal — simplesmente indica a operação de subtrahir; pois, está subentendido que os dois termos da subtracção são de natureza positiva, porque a expressão completa seria $+a-+b$.

Se, porém, da quantidade positiva a subtrahissemos a quantidade negativa $-b$, a expressão completa seria $+a--b$. Nesta expressão fica claro que o primeiro signal — indica simplesmente uma subtracção, e o segundo signal — mostra a natureza negativa da quantidade $-b$. Ora, como a repetição de dois signaes iguaes póde trazer confusão, emprega-se o parenthesis ( ) para se escrever com clareza as expressões algebricas, e assim temos $a-(-b)$.

64. Quando duas ou mais quantidades são consideradas como um só termo, fecham-se com um parenthesis, para serem tomadas neste sentido. Assim, a expressão $10-(6+2)$ mostra que de 10 temos de subtrahir $6+2$, isto é, 8. Se tirassemos o parenthesis, a expressão seria $10-6+2$, isto é, mostrava que de 10 deveriamos tirar 6, e ao resto juntar 2, o que daria um resultado differente do primeiro; precisamos, pois, saber tirar o parenthesis de uma expressão algebrica sem lhe alterar o valor.

65. Os dois principios seguintes nos esclarecerão perfeitamente neste ponto.

1° *Quando uma expressão algebrica fechada por um parenthesis é precedida pelo signal +, póde-se tirar o parenthesis sem se alterar o valor da expressão.*

Demonstração. Segundo este principio, a expressão $a+(b-c)$ deve ser igual a $a+b-c$. Ora é evidente que tirando o parenthesis em nada se altera a expressão, porque em ambos os casos junta-se $b-c$ á quantidade a.

Dando á lettra a o valor de 5, a b o valor de 4, e a c o valor de 3, teremos

$$a+(b-c)=5+(4-3)=6.$$
$$a+\ b-c\ =5+\ 4-3\ =6.$$

2° *Quando uma expressão algebrica fechada por um parenthesis é precedida pelo signal —, para se tirar o parenthesis sem se alterar o valor da expressão, é necessario trocar os signaes de todos os termos fechados no parenthesis: o que for positivo, ficará negativo; e o que for negativo, ficará positivo.*

Demonstração. Segundo este principio a expressão $a-(b-c)$ deve ser igual a $a-b+c$. O termo b, que no parenthesis tinha o signal + subentendido, fica com o signal — para indicar a subtracção; o termo c, que tinha o signal —, fica com o signal +, pela razão exposta no n.° **61**. Dando a estas lettras os mesmos valores que demos acima, teremos

$$a-(b-c)=5-(4-3)=4.$$
$$a-\ b+c\ =5-\ 4+3\ =4.$$

66. Quando duas ou mais quantidades que já teem um parenthesis, são consideradas como um só termo, ligam-se com um vinculo como $a-\overline{b+(c-d)}$.

Esta expressão sem o vinculo ficará transformada em $a-b-(c-d)$, e sem o parenthesis ficará $a-b-c+d$.

Com o auxilio do parenthesis e do vinculo podemos exprimir um polynomio por diversas fórmas sem alterarmos o seu valor.

Tirar o parenthesis dos seguintes polynomios sem lhes alterar o valor :

		Resp.
1.	$a-(+b)$.	$a-b$.
2.	$a-(-b)$.	» $a+b$.
3.	$ab+(a-c)$.	» $ab+a-c$.
4.	$ax-(a-y)$.	» $ax-a+y$.
5.	$a-b-(a+b)$.	» $-2b$.
6.	$2a+(8-7+6)-x$.	» ?
7.	$5x-3b-(-3a+c)$.	» ?
8.	$2a-b-(-2a+b)$.	» ?
9.	$ab-(bc-d)$.	» ?
10.	$5x-(-y+ab-4d)$.	» ?

MULTIPLICAÇÃO

67. Multiplicação em Algebra é a operação que tem por fim achar o producto de duas quantidades algebricas.

A quantidade que se multiplica, chama-se **multiplicando**; a quantidade pela qual ella é multiplicada, chama-se **multiplicador**; e o resultado da operação chama-se **producto**.

O multiplicando e o multiplicador, chamam-se tambem **factores** do producto.

68. Como foi já demonstrado no n.° **16**, *o producto de duas ou mais quantidades é sempre o mesmo, seja qual for a ordem em que tomarmos esses factores.*

Isto quer dizer que se tomarmos o multiplicando pelo multiplicador ou o multiplicador pelo multiplicando, o producto será sempre o mesmo. Assim $5\times4=4\times5$; do mesmo modo $a\times b=b\times a$; em ambos os casos o producto é ab.

Segue-se deste principio que o producto de $a\times c\times3$, de $a\times3\times c$ ou de $3\times c\times a$ é o mesmo; e como se escreve primeiro o coefficiente numeral e depois as lettras na ordem alphabetica, o producto das tres operações é $3ac$.

69. Na multiplicação algebrica ha tres casos a considerar, que são :

1° *Quando os dois factores são monomios.*
2° *Quando um factor é polynomio e o outro monomio.*
3° *Quando ambos os factores são polynomios.*

Primeiro caso da multiplicação

70. Em cada caso da multiplicação algebrica é necessario que o discipulo saiba operar com quatro dados que são :

1° *O coefficiente.*
2° *A parte litteral.*
3° *O expoente.*
4° *O signal.*

71. O coefficiente e a parte litteral. Para determinarmos a regra para achar o coefficiente e a parte litteral do producto, resolveremos o seguinte problema :

Problema. Qual é o producto de $2a$ multiplicado por $3b$?

Solução. O producto de 2×3 é 6 ; o producto de $a\times b=ab$. (n° **14**) Então o producto de $2a\times3b=6ab$.

Operação

Multiplicando	$2a$
Multiplicador	$3b$
Producto	$6ab$

Regra. *Para se obter o coefficiente e a parte litteral de um producto, multiplicam-se entre si os coefficientes, e ao producto juntam-se todas as lettras dos dois factores na ordem alphabetica.*

Exemplos para resolver :

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
Multiplicando	$3x$	$4ab$	$15ac$	$19abc$
Multiplicador	$2y$	$3cd$	x	$5dx$
Producto	$6xy$	$12abcd$	$15acx$	$95abcdx$

(5.)	(6.)	(7.)	(8.)	(9.)
$9acx$	$20xy$	$18az$	$28xz$	$15xy$
$7b$	$10z$	$15by$	y	$8ab$

72. O expoente. Para determinarmos a regra do expoente, resolveremos o seguinte problema:

Problema. Qual é o producto de $3a^2$ multiplicado por $4a^3$?

Solução. Multiplicando os coefficientes, temos $3\times 4=12$; multiplicando agora as duas potencias de a, temos $a^2\times a^3=a^{2+3}=a^5$. O producto é pois $12a^5$.

Demonstração. Desde que $3a^2=3aa$, e $4a^3=4aaa$, segue-se que o producto de $3aa\times 4aaa$, é $12aaaaa$; ora, como $aaaaa$ se exprime a^5, (n.º **25**), segue-se que o producto é $12a^5$. Portanto,

Operação

$$\begin{array}{r} 3a^2 \\ 4a^3 \\ \hline 12a^5 \end{array}$$

Regra. *O expoente de uma lettra no producto é igual á somma dos expoentes da mesma lettra nos dois factores.*

Exemplos para resolver:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
$3b$	$4ab$	$7ab^3$	$18ab$	$26x^3$
$5b$	a	$5ab$	$5b^2c$	$5a^4x^2$
$15b^2$	$4a^2b$	$35a^2b^4$	$90ab^3c$	$130a^4x^5$

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)
$12b^2$	$13ab^2$	$18a^2b^2$	$20x^5y$	$7abcd$
b	$6a^2b$	$5ab^3$	$8x^4y$	$9ab^2c^3d$

Nota. Quando ambos os factores da multiplicação são potencias da mesma lettra, pode-se operar simplesmente com os expoentes. Assim, $a^3\times a^2=a^{3+2}=a^5$; $x^2\times x=x^{2+1}=x^3$; $x^3\times x^2\times x^4=x^{3+2+4}=x^9$.

73. Os signaes. Investigando as leis que regem os signaes do producto, temos o resultado seguinte:

Se os signaes dos dois factores forem iguaes, o signal do producto será positivo; mas se forem desiguaes, o signal do producto será negativo. Isto quer dizer que

+ multiplicado por + dá +,
— multiplicado por — dá +,
+ multiplicado por — dá —,
— multiplicado por + dá —,

Demonstração. Para podermos comprehender a razão deste resultado, devemos analysar cada um destes casos separadamente.

PRIMEIRO CASO. Qual é o producto de $+a$ multiplicado por $+4$?

Analyse. A quantidade $+a$ tomada uma vez é $+a$; tomada duas vezes é $+2a$; tomada tres vezes é $+3a$, e tomada quatro vezes é $+4a$. Ora, como o multiplicador é positivo, mostra que o producto $+4a$ deve entrar no calculo de que esta multiplicação faz parte, com uma quantidade additiva, e por isso deve levar o signal +. Então o producto de $+a\times(+4)=+4a$. Logo, *o producto de duas quantidades positivas é positivo.*

SEGUNDO CASO. Qual é o producto de $-a$ multiplicado por -4?

Analyse. A quantidade $-a$ tomada quatro vezes é $-4a$. Ora, o signal do multiplicador sendo —, mostra que o producto $-4a$ tem de entrar no calculo de que faz parte esta multiplicação, como um subtractivo; mas a subtracção de uma quantidade negativa tem effeito positivo, isto é, essa quantidade entra no calculo com um additivo (n.º **59**), e por isso deve levar o signal +; então, $-a\times(-4)=+4a$. Logo, *o producto de duas quantidades negativas é positivo.*

TERCEIRO CASO. Qual é o producto de $+a$ multiplicado por -4?

Analyse. Já vimos no primeiro caso que a quantidade $+a$ tomada quatro vezes é $+4a$. Ora, como o signal do multiplicador é —, mostra que o producto $+4a$ deve entrar no calculo de que faz parte esta multiplicação, como um subtractivo, e por isso deve levar o signal —; então $+a\times(-4)=-4a$. Logo, *uma quantidade positiva multiplicada por uma negativa, dá um producto negativo.*

QUARTO CASO. Qual é o producto de $-a$ multiplicado por $+4$?

Analyse. A quantidade $-a$ tomada uma vez é $-a$; tomada duas vezes é $-2a$; tomada tres vezes é $-3a$, e tomada quatro vezes é $-4a$. Ora, como o signal do multiplicador é +, mostra que o producto $-4a$ deve entrar no calculo de que faz parte esta multiplicação, como um additivo; mas a addição de uma quantidade negativa é o mesmo que uma subtracção, e por isso o producto deve levar o signal —. Então o producto de $-a\times(+4)=-4a$. Logo, *uma quantidade negativa multiplicada por uma positiva, dá um producto negativo.*

74. Nestas quatro analyses estabelecemos a seguinte regra dos signaes:

Regra. *O producto de signaes iguaes leva o signal +, e o producto de signaes desiguaes leva o signal —.*

Exercicios para resolver:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
Multiplicando	$+5a$	$-3x$	$+5ab$	$-12y$
Multiplicador	$+2b$	$+x$	$-3bc$	$-5x$
Producto	$+10ab$	$-3x^2$	$-15ab^2c$	$+60xy$

(5.)	(6.)	(7.)	(8.)	(9.)
$+12x^2$	$-8ab$	$+16bx$	$-25x$	$+15abc$
$+5a$	$+9ac$	$-6a$	$-8y^2$	$-12ac$

Segundo caso da multiplicação

75. Quando o multiplicando é um polynomio, multiplica-se cada um dos seus termos pelo multiplicador, observando as regras dos coefficientes, expoentes, parte litteral e signaes.

Problema. Qual é o producto de $a-b$ multiplicado por b?

Solução. Multiplicando cada termo do multiplicando pelo multiplicador, temos $a\times b=ab$. Como ambos os factores teem o signal $+$ subentendido, o producto é positivo. O segundo termo é $b\times b=b^2$. Como neste caso um dos factores tem o signal $-$, e o outro, o signal $+$ subentendido, o producto será negativo, e o resultado da operação será $ab-b^2$.

Demonstração. Podemos dar uma demonstração numerica da exactidão do producto, dando á quantidade a o valor de 5, e a b, o valor de 2. Multiplicando $5-2$ por 2, temos o producto de $10-4=6$. Ora, o termo ab é igual a $5\times 2=10$, e o termo b^2 igual a $2\times 2=4$; logo, o producto $ab-b^2$ é igual a $10-4=6$.

Operação

$$\begin{array}{r} a-b \\ b \\ \hline ab-b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} a-b= & 5-2 \\ b= & 2 \\ \hline ab-b^2= & 10-4=6 \end{array}$$

Exercicios para resolver:

(1.) $\begin{array}{r} ab+cd \\ ac \\ \hline a^2bc+ac^2d \end{array}$ (2.) $\begin{array}{r} bc-ad \\ ab \\ \hline ab^2c-a^2bd \end{array}$ (3.) $\begin{array}{r} 2a-b \\ -x \\ \hline -2ax+bx \end{array}$ (4.) $\begin{array}{r} a+b-5. \\ 2a. \\ \hline 2a^2+2ab-10a \end{array}$

5. Multiplicar $a+d$ por b. Resp. $ab+bd$.
6. Multiplicar $ac+bc$ por d. » $acd+bcd$.
7. Multiplicar $4x+5y$ por $3a$. » $12ax+15ay$.
8. Multiplicar $2x+3y$ por $2b$. » $4bx+6by$.
9. Multiplicar $m+2n$ por $-3n$. » $-3mn-6n^2$.
10. Multiplicar $x+y$ por ax. » ax^2+axy.
11. Multiplicar $2a+2b-3c$ por a. » $2a^2+2ab-3ac$.
12. Multiplicar $ab+ax+xy+6$ por $2ax$.
Resp. $2a^2bx+2a^2x^2+2ax^2y+12ax$.

Terceiro caso da multiplicação

76. Quando ambos os factores são polynomios, opera-se do seguinte modo:

Problema. Qual é o producto de $a+b$ multiplicado por $a+b$?

Solução. Multiplicando $a+b$ por a, temos o producto parcial a^2+ab; multiplicando depois $a+b$ por b, temos o producto parcial $ab+b^2$; sommando agora os dois productos parciaes, temos $a^2+2ab+b^3$, que é o producto total da multiplicação.

Operação

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Regra geral. *Multiplica-se cada termo do multiplicando por cada termo do multiplicador conforme a regra dos coefficientes, parte litteral, expoentes e signaes; e a somma de todos os productos parciaes será o producto total.*

Operar as seguintes multiplicações:

(1.)

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

(2.)

$$\begin{array}{r} 3a^3b+a^2b \\ 4a^2b-3ab \\ \hline 12a^5b^2+4a^4b^2 \\ -9a^4b^2-3a^3b^2 \\ \hline 12a^5b^2-5a^4b^2-3a^3b^2 \end{array}$$

3. Multiplicar $a+b$ por $x-y$. Resp. $ax-ay+bx-by$.
4. Multiplicar $a-b$ por $a-b$. » $a^2-2ab+b^2$.
5. Multiplicar $a-b$ por $a+b$. » a^2-b^2.
6. Multiplicar a^2+ac+c^2 por $a-c$. » a^3-c^3.
7. Multiplicar $m+n$ por $m-n$. » m^2-n^2.
8. Multiplicar y^2-y+1 por $y+1$. » y^3+1.
9. Multiplicar x^2+y^2 por x^2-y^2. » x^4-y^4.
10. Multiplicar a^2-3a+8 por $a+3$. » a^3-a+24.
11. Multiplicar $3a+5b$ por $3a-5b$. » $9a^2-25b^2$.
12. Multiplicar a^2-ab+b^2 por $a+b$. » ?
13. Multiplicar $d-bx$ por $d-cx$. » ?
14. Multiplicar $3a^2+x$ por $2a^2+4x$. » ?

Uso do parenthesis na multiplicação

77. Se um parenthesis está unido ao signal $\times$, mostra que cada termo do parenthesis tem de ser multiplicado pelo termo a que está ligado o signal $\times$. Assim, $2a\times(a+b-c)$ ou $(a+b-c)\times 2a$, mostra que os termos a, b, e c teem de ser multiplicados por $2a$; e para tirarmos o parenthesis desta expressão sem lhe alterarmos o valor, é necessario operar a multiplicação, e a expressão se transformará em $2a^2+2ab-2ac$.

78. Quando entre dois parenthesis está o signal $\times$, mostra que a quantidade contida no primeiro parenthesis deve ser multiplicada pela quantidade contida no segundo. Assim, a expressão $(a+x)\times(a-x)$ mostra que $a+x$ deve ser multiplicado por $a-x$, e o resultado desta expressão será a^2-x^2.

Nota. Nestes exemplos supprime-se sempre o signal $\times$, e escreve-se simplesmente $2a(a+b-c)$ e $(a+x)\,(a-x)$.

Dois ou mais polynomios fechados cada um por um parenthesis, mostram que se requer o producto de todos. Assim, a expressão $(a+b)\,(a+c)\,(a-d)$ quer dizer $(a+b)\times(a+c)\times(a-d)$.

Tirar o parenthesis das seguintes expressões sem lhes alterar o valor:

		Resp.
1.	$ab(a+b)$.	a^2b+ab^2.
2.	$(ab-3a)5$.	» $5ab-15a$.
3.	$a(x-y)$.	» $ax-ay$.
4.	$(x+y)\,(x+y)$.	» $x^2+2xy+y^2$.
5.	$(a-b)\,(a+b)$.	» a^2-b^2.
6.	$(5+6+3-12)x$.	» $2x$.
7.	$3x(a+ab-x)$.	» $3ax+3abx-3x^2$.
8.	$abc(a-ac)$.	» $a^2bc-a^2bc^2$.
9.	$(ab+cd)\,(ab-cd)$.	» $a^2b^2-c^2d^2$.
10.	$(a+b)\,(a+b)+(a-b\,(a-b)$.	» $2a^2+2b^2$.
11.	$(5+8a)2a$.	» ?
12.	$(x+3y)5$.	» ?
13.	$2x(5x-3y)$	» ?
14.	$xy(a+b-3)$.	» ?
15.	$(a+b)\,(a+b)$.	» ?
16.	$(a+2b)\,(2-a)$	» ?
17.	$2ab(x+y+z)$	» ?

79. Quando se quer indicar o quadrado de um polynomio, isto é, o producto de um polynomio multiplicado por si mesmo, fecha-se o polynomio com um parenthesis e dá-se-lhe o expoente 2; quando se quer indicar o seu cubo, dá-se-lhe o expoente 3; quando se quer indicar a quarta potencia, dá-se-lhe o expoente 4, e assim por diante. De sorte que,

$$(a+b)^2=(a+b)\,(a+b) \text{ ou } a^2+2ab+b^2.$$
$$(a+b)^3=(a+b)\,(a+b)\,(a+b).$$
$$(a+b)^4=(a+b)\,(a+b)\,(a+b)\,(a+b).$$

Achar o resultado das seguintes expressões:

		Resp.
18.	$(2a+y)^2$	$4a^2+4ay+y^2$.
19.	$(x-3)^3$.	» $x^3-9x^2+27x-27$.
20.	$(4a+5b)^2$.	» ?
21.	$(a+b-2c)^3$.	» ?
22.	$(6-4)^4$.	» ?

DIVISÃO

80. Divisão em Algebra é a operação que tem por fim achar quantas vezes uma quantidade algebrica contém outra.

A quantidade que se divide, chama-se **dividendo.**

A quantidade pela qual se divide o dividendo, chama-se **divisor.**

O resultado da operação chama-se **quociente.**

81. A divisão é o inverso da multiplicação, e por isso, multiplicando o divisor pelo quociente, obteremos exactamente o dividendo.

A divisão indica-se escrevendo o divisor debaixo do dividendo em fórma de fracção. Assim, para indicarmos que ab deve ser dividido por a, escreveremos $\frac{ab}{a}$. Tambem se póde indicar a divisão como em Arithmetica, escrevendo o divisor á direita do dividendo, como: $ab \,|\, a$.

82. Na divisão ha tres casos a considerar, que são:

1° *Dividir um monomio por outro monomio.*
2° *Dividir um polynomio por um monomio.*
3° *Dividir um polynomio por outro polynomio.*

Primeiro caso da divisão

83. Na divisão, assim como na multiplicação, é necessario que o discipulo, saiba em qualquer caso, operar com os quatro dados seguintes:

1° *O coefficiente.*	3° *O expoente.*
2° *A parte litteral.*	4° *O signal.*

84. O coefficiente e a parte litteral. Para determinarmos a regra para se achar o coefficiente e a parte litteral do quociente, resolveremos os seguintes problemas:

I Problema. Qual é o quociente de $6ab$ dividido por 2?

Solução. Dividir $6ab$ por 2 é dividir esta quantidade em duas partes iguaes, e por isso o quociente é $3ab$. Multiplicando agora o divisor pelo quociente, temos $2\times 3ab=6ab$ que subtrahido do dividendo, não deixa resto.

Operação

$$\begin{array}{r|l} 6ab & 2 \\ \hline 6ab & 3ab \\ \hline 0 & \end{array}$$

II Problema. Qual é o quociente de $6ab$ dividido por $3ab$?

Solução. Em $6ab$ quantas vezes ha $3ab$? Ha 2 vezes, porque 2 vezes $3ab$ são $6ab$; então o quociente é 2.

Operação

$$\begin{array}{l|l} 6ab & 3ab \\ \hline 6ab & 2 \\ 0 & \end{array}$$

Regra. *Divide-se o coefficiente do dividendo pelo coefficiente do divisor, e ao quociente junta-se a parte litteral do dividendo que não estiver no divisor, de sorte que, multiplicado o divisor pelo quociente, dê o dividendo.*

Operar as seguintes divisões:

(1.) $\begin{array}{l|l} 6a & 6 \\ \hline 6a & a \\ 0 & \end{array}$ (2.) $\begin{array}{l|l} ab & a \\ \hline ab & b \\ 0 & \end{array}$ (3.) $\begin{array}{l|l} 3ab & b \\ \hline 3ab & 3a \\ 0 & \end{array}$ (4.) $\begin{array}{l|l} abx & x \\ \hline abx & ab \\ 0 & \end{array}$ (5.) $\begin{array}{l|l} 8aby & 2ay \\ \hline 8aby & 4b \\ 0 & \end{array}$

(6.) $8xy \mid 4x$ (7.) $15x \mid 3$ (8.) $18abc \mid 6abc$ (9.) $25xyz \mid 5z$ (10.) $21abcd \mid 7c$

85. O expoente. Para estabelecermos a regra para achar o expoente do quociente, resolveremos o seguinte problema:

Problema. Qual é o quociente de $6a^5$ dividido por $2a^2$?

Solução. Dividindo 6 por 2, o quociente é 3. Para se dividir a^5 por a^2, acha-se a differença dos expoentes, que é $5-2=3$. Então o quociente de $a^5 \div a^2$ é $a^{5-2}=a^3$, porque $a^2 \times a^3 = a^5$. Juntando agora os coefficientes, temos $6a^5 \div 2a^2 = 3a^3$.

Operação

$$\begin{array}{l|l} 6a^5 & 2a^2 \\ \hline 6a^5 & 3a^3 \\ 0 & \end{array}$$

Demonstração. O dividendo $6a^5$ é igual a $6aaaaa$, e o divisor $2a^2$, igual a $2aa$. Ora, desde que a lettra a entra 5 vezes como factor no dividendo, e só 2 vezes no divisor, claro está que ella terá de entrar 3 vezes no quociente, para que o producto do divisor multiplicado pelo quociente dê o dividendo. Como o expoente mostra quantas vezes uma lettra é tomada como factor, segue-se que a differença entre o expoente do dividendo e o do divisor será o expoente do quociente.

$$\begin{array}{l|l} aaaaa & aa \\ \hline aaaaa & aaa \\ 0 & \end{array}$$

Regra. *Do expoente de uma lettra no dividendo subtrahindo o expoente da mesma lettra no divisor, o resto será o expoente dessa lettra no quociente.*

Nota. Quando o dividendo e o divisor são só potencias da mesma lettra, póde-se operar só com o expoente. Assim, $x^8 \div x^5 = x^{8-5} = x^3$, $x^2 \div x = x^{2-1} = x^1 = x$.

Operar as seguintes divisões:

(1.) $\begin{array}{l|l} xy^2 & x \\ \hline xy^2 & y^2 \\ 0 & \end{array}$ (2.) $\begin{array}{l|l} ab^3 & b^3 \\ \hline ab^3 & a \\ 0 & \end{array}$ (3.) $\begin{array}{l|l} 12a^5b^2 & 3a^3b \\ \hline 12a^5b^2 & 4a^2b \\ 0 & \end{array}$ (4.) $\begin{array}{l|l} 6xy^3 & 3y^3 \\ \hline 6xy^3 & 2x \\ 0 & \end{array}$

(5.) $x^5 \mid x$ (6.) $y^4 \mid y^2$ (7.) $a^7 \mid a^5$ (8.) $x^{12} \mid x^4$

(9.) $16ab^2 \mid 4ab$ (10.) $14xy \mid 7$ (11.) $24abc^2 \mid 8ac$ (12.) $7x^3y^2 \mid xy$

86. Os signaes. A regra para os signaes na divisão é a mesma que na multiplicação. Se os dois termos da divisão tiverem signaes iguaes, o quociente será positivo; se tiverem signaes differentes, o quociente será negativo.

Demonstração. Demonstra-se este resultado com a propria regra dos signaes na multiplicação; pois, se os signaes de dois factores de uma multiplicação produzem o signal do producto, claro está que o signal do producto dividido por um dos factores, dará o signal do outro factor. De sorte que, sendo

$$+a \times +b = +ab, \text{ então } +ab \div +b = +a.$$
$$-a \times -b = +ab, \text{ então } +ab \div -b = -a.$$
$$+a \times -b = -ab, \text{ então } -ab \div -b = +a.$$
$$-a \times +b = -ab, \text{ então } -ab \div +b = -a.$$

Problema. Qual é o quociente de $-18abc$ dividido por $+6b$?

Solução. $-18abc$ dividido por $6b$, o quociente é $-3ac$. Como o signal do dividendo é $-$, e o signal do divisor é $+$, segue-se que o signal do quociente deve ser $-$, para que multiplicado o divisor pelo quociente dê o dividendo. Então o quociente é $-3ac$, porque $+6b \times (-3ac)$ dá $-18abc$.

Operação

$$\begin{array}{l|l} -18abc & +6b \\ \hline -18abc & -3ac \\ 0 & \end{array}$$

Regra. *Se o dividendo e o divisor tiverem signaes iguaes, o quociente terá o signal $+$; se tiverem signaes differentes, o quociente terá o signal $-$.*

Operar as seguintes divisões:

(1.)	(2.)	(3.)
$+15ax \mid -3x$	$-32abc \mid -4ab$	$+21xy^2 \mid +7y$
$+15ax \quad -5a$	$-32abc \quad +8c$	$+21xy^2 \quad +3xy$
0	0	0

(4.)	(5.)	(6.)
$-27axy \mid +9a$	$+33bc \mid -11c$	$+18a^3b^4 \mid 9a^2$

87. Em todos os exemplos que temos dado na divisão de monomios, o dividendo é exactamente dividido pelo divisor; ha, porém, tres casos em que um monomio não póde ser exactamente dividido por outro monomio. Estes tres casos são:

1° Quando o coefficiente do dividendo não é exactamente dividido pelo coefficiente do divisor.

2° Quando a mesma lettra tem um expoente maior no divisor que no dividendo.

3° Quando o divisor tem uma ou mais lettras que não se acham no dividendo.

Em qualquer destes casos, indica-se a divisão escrevendo o divisor debaixo do dividendo, em fórma de fracção; e o quociente será então um monomio fraccionario, que póde ser simplificado, se o dividendo e o divisor tiverem algum factor ou divisor commum.

Antes, porém, de entrarmos neste processo, precisamos saber o que quer dizer em Algebra a palavra cancellar.

88. A palavra **cancellar** significa passar um traço ou risco sobre um algarismo ou lettra para annullar o seu valor, como $\cancel{3}$, $\cancel{5}$, $\cancel{a}$, $\cancel{b}$, $\cancel{d}$, $\cancel{y}$.

O cancellamento tem muita applicação em Algebra e Arithmetica; no problema seguinte temos um exemplo:

Problema. Qual é o quociente de $15ax$ dividido por $9x^2y$?

Solução. Por tres razões o dividendo $15ax$ não póde ser dividido exactamente por $9x^2y$. Primeira, porque o coefficiente 15 não póde ser dividido pelo coefficiente 9. Segunda, porque o expoente de x é maior no divisor do que no dividendo. Terceira, porque a lettra y não se acha no dividendo. A divisão será então indicada escrevendo-se o divisor debaixo do dividendo; mas, como 15 e 9 são divisiveis por 3, opera-se a divisão, e estes dois coefficientes ficarão reduzidos a 5 e a 3. Como a lettra x é commum a ambos os termos, cancella-se no dividendo e no divisor, e ella ficará reduzida de x^2 ou $x \times x$ a simplesmente x, e o quociente simplificado será $\frac{5a}{3xy}$.

Operação

$$\frac{15ax}{9x^2y} = \frac{\cancel{3} \times 5 \times a \times \cancel{x}}{\cancel{3} \times 3 \times \cancel{x} \times x \times y} = \frac{5a}{3xy}$$

Demonstração. O dividendo $15ax$ é composto de $3 \times 5 \times a \times x$, e o divisor $9x^2y$ é composto de $3 \times 3 \times x \times x \times y$. Ora, cancellando-se um factor igual no dividendo e no divisor, não se altera o valor do quociente. (Arith. Progressiva n.° **108**). Então cancellando os factores 3 e x, que são communs ao dividendo e ao divisor, teremos o quociente reduzido a $\frac{5a}{3xy}$. Este processo é uma simples reducção de uma fracção algebrica á sua expressão mais simples, da qual trataremos mais adeante.

Operar as seguintes divisões:

1. Dividir $6amx$ por $3abc$. Resp. $\frac{2mx}{bc}$.
2. Dividir $49a^2b^2$ por $14a^3b$. » $\frac{7b}{2a}$.
3. Dividir $18a^2b$ por $12a^4b^4$. » $\frac{3}{2a^2b^3}$.
4. Dividir $28a^5b^6c^7$ por $16ab^2c^8$. » $\frac{7a^4b^4}{4c}$.
5. Dividir $100a^8b^5x$ por $25a^3b^4d$. » $\frac{4a^5bx}{d}$.
6. Dividir $121a^3b^2c^5$ por $11b^3$. » $\frac{11a^3c^5}{b}$.

89. Nos exemplos que demos para ensaiar as regras dos coefficientes, parte litteral, expoentes e signaes, escrevemos sempre o divisor á direita do dividendo, por tres motivos:

1° Porque a divisão ficando semelhante á da Arithmetica póde ser comprehendida mais facilmente.

2° Porque o discipulo operando a divisão, vê logo que o divisor multiplicado pelo quociente dá exactamente o dividendo, o que é importante conhecer praticamente.

3° Porque para operar a divisão por cancellamento, é necessario primeiro entrar na exposição deste processo, o que não convem fazer logo no começo da divisão algebrica, para evitar confusão no ensino.

90. Agora, porém, que o discipulo já sabe cancellar os factores communs ao dividendo e ao divisor, poderá facilmente resolver qualquer desses exemplos por este meio. Assim, dividindo $9abc$ por $3ab$, temos $\frac{9abc}{3ab}$; cancellando os factores communs ao dividendo e ao divisor, temos $\frac{3 \times \cancel{3} \times \cancel{a} \times \cancel{b} \times c}{\cancel{3} \times \cancel{a} \times \cancel{b}} = 3c$. Todos os outros exemplos apresentados podem ser resolvidos do mesmo modo.

Segundo caso da divisão

91. A divisão de um polynomio por um monomio opera-se do seguinte modo:

Problema. Dividir $ab+ac+ad$ por a.

Solução. Desde que o factor a entra em cada um dos termos do dividendo, é claro que cada termo do dividendo póde ser dividido por a. Portanto,

Operação

$$\begin{array}{l|l} ab+ac+ad & a \\ \underline{ab+ac+ad} & \overline{b+c+d} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Regra. *Divide-se cada termo do dividendo pelo divisor, observando as regras dos coefficientes, parte litteral, expoentes e signaes.*

Operar as seguintes divisões:

1. Dividir $6x+12y$ por 3.	Resp.	$2x+4y$.
2. Dividir $15x-20b$ por 5.	»	$3x-4b$.
3. Dividir $21a+35b$ por -7.	»	$-3a-5b$.
4. Dividir $6ax+9ay$ por $3a$.	»	$2x+3y$.
5. Dividir $ab+ac$ por a.	»	$b+c$.
6. Dividir $abc-acf$ por ac.	»	$b-f$.
7. Dividir $12ay-8ac$ por $-4a$.	»	$-3y+2c$.
8. Dividir $10ax-15ay$ por $-5a$.	»	$-2x+3y$.
9. Dividir $12bx-18x^2$ por $6x$.	»	$2b-3x$.
10. Dividir $a^2b^2-2ab^3x$ por ab.	»	$ab-2b^2x$.
11. Dividir $12a^2bc-9acx^2+6ab^2c$ por $3ac$.	»	$4ab-3x^2+2b^2$.
12. Dividir $15a^5b^2c-21a^2b^3c^2$ por $3a^2bc$.	»	$5a^3b-7b^2c$.
13. Dividir $-16by^3+4y^2$ por $4y^2$.	»	$-4by+1$.
14. Dividir $3ab+15a^2b-27a^2b$ por $3ab$.	»	?
15. Dividir $4a^4-20a^3+8ab$ por $4a$.	»	?

Terceiro caso da divisão

92. Para operarmos o terceiro caso da divisão algebrica, é conveniente sabermos ordenar um polynomio.

Já vimos no n.° **37** que a ordem em que escrevermos os termos de um polynomio, não altera o seu valor. Assim, $a+b$ é igual a $b+a$; do mesmo modo x^2+xy é igual a $xy+x^2$. Ha, porém, certa conveniencia em escrever os termos de um polynomio em certa ordem para facilitar a divisão e outros processos algebricos.

93. Ordenar um polynomio é pois escrever todos os seus termos de modo que os expoentes de uma lettra vão diminuindo da esquerda para a direita, afim de tomar a fórma mais conveniente para a divisão, e para a extracção das raizes.

Para ordenar, por exemplo, o polynomio $23a^2b+5b^3+22ab^2+6a^3$, toma-se o termo que tem a mais alta potencia de a, e depois, em ordem decrescente, as outras potencias de a, e teremos $6a^3+23a^2b+22ab^2+5b^3$. O expoente 3 decresce até desapparecer.

94. Para se operar uma divisão de polynomios, é conveniente ordenar tambem o divisor, isto é, escrevel-o de modo que o primeiro termo do dividendo seja exactamente dividido pelo primeiro termo do divisor, para assim facilitar a divisão. Se quizermos dividir $a^2+2ab+b^2$ por $b+a$, é mais conveniente ordenar este divisor e escrever $a+b$, porque é nesta ordem que as lettras a e b estão no dividendo.

Problema. Dividir $6a^2-13ax+6x^2$ por $2a-3x$.

Solução. Como o dividendo e o divisor já se acham ordenados no problema, procede-se a divisão.

Dividindo o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor, o quociente é $3a$; multiplicando agora o divisor por este termo, temos o producto de $6a^2-9ax$, que subtrahido do dividendo, deixa o resto $-4ax$ que com o termo seguinte do dividendo faz o dividendo parcial $-4ax+6x^2$.

Dividindo agora o primeiro termo do dividendo parcial pelo primeiro termo do divisor, o quociente é $-2x$. Multiplicando o divisor por este termo, temos $-4ax+6x^2$ que subtrahido do dividendo parcial, nada resta. O quociente é pois $3a-2x$.

Prova. Multiplicado o divisor pelo quociente, obtemos exactamente o dividendo, o que prova que a divisão está exacta.

Operação

$$\begin{array}{l|l} 6a^2-13ax+6x^2 & 2a-3x \\ \underline{6a^2-9ax} & \overline{3a-2x} \\ 0-4ax+6x^2 & \\ \underline{-4ax+6x^2} & \\ \;0 \quad\; 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a-3x \\ \underline{3a-2x} \\ 6a^2-9ax \\ \underline{-4ax+6x^2} \\ 6a^2-13ax+6x^2 \end{array}$$

Regra. *Ordenam-se o dividendo e o divisor, e depois divide-se o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor, e o resultado será o primeiro termo do quociente.*

Multiplica-se o divisor por este termo do quociente, o producto subtrahe-se do dividendo, e ao resto junta-se o termo seguinte do dividendo para formar um novo dividendo parcial.

Repete-se este processo até se dividirem todos os termos do dividendo, e se não houver resto, a divisão se denominará exacta.

Operar as seguintes divisões:

(1.)

Dividendo — Divisor

$$\begin{array}{l|l} 6a^2-2a-8 & 2a+2 \\ \underline{6a^2+6a} & \overline{3a-4} \text{ Quociente} \\ 0\ -8a-8 & \\ \underline{0\ -8a-8} & \\ \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

(2.)

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3y+x^2y+xy^2+2y & x+y \\ \underline{x^4+x^3y} & \overline{x^3+xy} \\ 0 \quad 0 \quad x^2y+xy^2 & \\ \qquad\quad \underline{x^2y+xy^2} & \\ \qquad\quad 0 \quad 0 \quad +2y & \end{array}$$

Nota. No segundo exemplo, a divisão não é exacta, e o quociente é mixto, porque é $x^3+xy+\frac{2y}{x+y}$.

3. Dividir $4a^2-8ax+4x^2$ por $2a-2x$. — Resp. $2a-2x$.
4. Dividir $2x^2+7xy+6y^2$ por $x+2y$. — » $2x+3y$.
5. Dividir $x^2+2xy+y^2$ por $x+y$. — » $x+y$.
6. Dividir $8a^4-8x^4$ por $2a^2-2x^2$. — » $4a^2+4x^2$.
7. Dividir $ac+bc-ad-bd$ por $a+b$. — » $c-d$.
8. Dividir $x^3+y^3+5xy^2+x^2y$ por $x^2+4xy+y^2$. — » $x+y$.
9. Dividir $a^3-9a^2+27a-27$ por $a-3$. — » a^2-6a+9.
10. Dividir a^3-b^3 por a^2+ab+b^2. — » $a-b$.
11. Dividir y^3+1 por $y+1$. — » y^2-y+1.
12. Dividir $12x^4-192$ por $3x-6$. — » ?
13. Dividir a^6-b^6 por $a+b$ — » ?
14. Dividir $4x^4-64$ por $2x-4$. — » ?
15. Dividir x^4-y^4 por $x-y$. — Resp. $2x^3+4x^2+8x+16$. — » $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.

THEOREMAS

95. Theorema, como já vimos no n.° **5**, é uma proposição ou enunciado que mostra alguma relação ou propriedade das quantidades algebricas.

Vamos dar agora alguns theoremas importantes que habilitarão os alumnos a executar com muita facilidade os processos que multiplicam rapidamente certas quantidades, e as decompoem com igual presteza em seus factores componentes.

Estes theoremas devem ser conservados na memoria para se tirar proveito delles.

1° Theorema

96. A somma da quantidade a e b é $a+b$; quadrando agora esta somma, isto é, multiplicando-a por si mesma $(a+b)^2$ ou $(a+b)\ (a+b)$, temos o producto $a^2+2ab+b^2$, como verificamos na operação ao lado. Podemos então formular o

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \\ \underline{+ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

I Theorema. *O quadrado da somma de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira, mais duas vezes o producto da primeira multiplicada pela segunda, mais o quadrado da segunda.*

O discipulo achará o quadrado das seguintes quantidades por meio deste theorema:

	Respostas		Respostas
1. $(2+3)^2$	$4+12+9$.	5. $(2+5)^2$	?
2. $(2a+b)^2$	$4a^2+4ab+b^2$.	6. $(2m+3n)^2$	?
3. $(3x+2y)^2$	$9x^2+12xy+4y^2$.	7. $(ab+cd)^2$	?
4. $(ax+by)^2$	$a^2x^2+2abxy+b^2y^2$.	8. $(x^2+xy)^2$	?

2° Theorema

97. A differença entre as duas quantidades a e b é $a-b$; quadrando esta differença, isto é, multiplicando-a por si mesma, $(a-b)^2$ ou $(a-b)\ (a-b)$, temos $a^2-2ab+b^2$, como verificamos na operação ao lado. Podemos então formular o

$$\begin{array}{r} a-b \\ \underline{a-b} \\ a^2-ab \\ \underline{-ab+b^2} \\ a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

II Theorema. *O quadrado da differença de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira, menos duas vezes o producto da primeira multiplicada pela segunda, mais o quadrado da segunda.*

Achar o quadrado das seguintes quantidades por meio deste theorema:

	Respostas		Respostas
1. $(5-2)^2$	$25-20+4$.	5. $(8-3)^2$	?
2. $(2a-b)^2$	$4a^2-4ab+b^2$.	6. $(ab-c)^2$	?
3. $(3x-2y)^2$	$9x^2-12xy+4y^2$.	7. $(ax-2x^2)^2$	?
4. $(x^2-y^2)^2$	$x^4-2x^2y^2+y^4$.	8. $(5a^2-b^2)^2$	?

98. O signal $\pm$ é uma combinação dos signaes + e —, e lê-se: *mais ou menos*. Nos dois theoremas precedentes podemos conhecer praticamente o sentido deste signal algebrico.

Desde que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, e $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, podemos exprimir estas duas formulas em uma só, escrevendo assim:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$$

Esta fórmula quer dizer que, se tomarmos o primeiro signal $\pm$ no sentido positivo, o segundo signal $\pm$ deverá tambem ser considerado positivo; se o tomarmos no sentido negativo, o segundo signal, deverá tambem ser considerado negativo. Este signal tem por fim reduzir duas fórmulas ou duas respostas a uma só.

3° Theorema

99. Multiplicando a somma $a+b$ pela differença $a-b$, temos o producto seguinte: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, como vemos na operação ao lado. Podemos então formular o

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \quad 0 \quad -b^2 \end{array}$$

III Theorema. *O producto da somma e da differença de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira menos o quadrado da segunda.*

Achar o producto das seguintes quantidades por meio deste theorema:

	Respostas		Respostas
1. $(5+3)(5-3)$.	$25-9$.	5. $(6+2)(6-2)$.	?
2. $(2a+b)(2a-b)$.	$4a^2-b^2$.	6. $(5a+c)(5a-c)$.	?
3. $(2x+3y)(2x-3y)$.	$4x^2-9y^2$.	7. $(2ab+y)(2ab-y)$.	?
4. $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$.	a^4-b^4.	8. $(x^3+y^3)(x^3-y^3)$.	?

4° Theorema

100. Se dividirmos 4 por 4, o quociente será 1, porque $\frac{4}{4}=1$. Assim, tambem, se dividirmos a^2 por a^2, o quociente será 1. Operando só com os expoentes, teremos $a^2 \div a^2 = a^{2-2=0} = a^0$, isto é, a elevado á potencia zero. Logo $a^0=1$. Podemos pois formular o

$$\frac{a^2}{a^2}=1$$

mas

$$a^2 \div a^2 = a^{2-2=0} = a^0$$

$$\therefore a^0=1.$$

IV Theorema. *Uma quantidade com a potencia zero é igual á unidade ou a 1.*

Illustração. Muitas vezes na divisão dos monomios acontece que os expoentes de uma lettra sendo iguaes no dividendo e no divisor, essa lettra não apparece no quociente. Quando porém se quer conservar a lettra original que desappareceu na operação, dá-se-lhe o expoente zero e inclue-se no quociente, e deste modo, o quociente conservará a lettra sem ficar alterado.

Se dividirmos, por exemplo, x^2y^2 por xy^2, operando só com os expoentes, o resultado será $x^2y^2 \div xy^2 = x^{2-1}y^{2-2} = x^1y^0 = x$: o quociente desta divisão é simplesmente x. Se porém incluirmos no quociente a lettra y com o expoente zero, em nada alteraremos o seu valor, porque sendo $y^0=1$, segue-se então que $x \times 1 = x$, e então $xy^0=x$.

Deste modo, qualquer lettra com o expoente zero póde ser incluida em um termo sem lhe alterar o valor.

Operar as seguintes divisões, conservando no quociente todas as lettras do dividendo:

1. Dividir $6a^2b^2c^4$ por $2a^2b^2$. Resp. $3a^0b^0c^4=3c^4$.
2. Dividir $8a^4b^3c^5$ por $4a^4b^3c$. » $2a^0b^0c^4$.
3. Dividir $32m^3n^2y^2$ por $4m^3n^2y^2$. » $8m^0n^0y^0$.
4. Dividir $-96a^4bc^2$ por $-24a^4b^5$. » $4a^0b^0c^2$.
5. Introduzir a e b como factores em $9c^3d^2$. » $9a^0b^0c^3d^2$.

5° Theorema

101. Se dividirmos a differença de duas potencias iguaes de duas quantidades pela differença dessas quantidades, a divisão será exacta como podemos verificar nos seguintes exemplos:

$$(a^2-b^2) \div (a-b) = a+b;$$
$$(a^3-b^3) \div (a-b) = a^2+ab+b^2;$$
$$(a^4-b^4) \div (a-b) = a^3+a^2b+ab^2+b^3;$$
$$(a^5-b^5) \div (a-b) = a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4.$$

Daqui poderemos estabelecer o

V Theorema. *A differença de potencias iguaes de duas quantidades é sempre divisivel pela differença dessas quantidades.*

Nota. O discipulo deve verificar a exactidão das quatro divisões precedentes.

6° Theorema

102. Se dividirmos a differença de duas potencias iguaes e pares de duas quantidades, pela somma dessas quantidades, a divisão será exacta, como podemos verificar pelos seguintes exemplos:

$$(a^2-b^2) \div (a+b) = (a-b);$$
$$(a^4-b^4) \div (a+b) = a^3-a^2b+ab^2-b^3;$$
$$(a^6-b^6) \div (a+b) = a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5.$$

Daqui poderemos formular o

VI Theorema. *A differença de potencias iguaes e pares de duas quantidades é sempre divisivel pela somma dessas quantidades.*

Nota. O discipulo deve verificar a exactidão das tres divisões precedentes.

7° Theorema

103. Se dividirmos a somma de duas potencias iguaes e impares de duas quantidades pela somma das mesmas quantidades, a divisão será exacta, como poderemos verificar nos exemplos seguintes:

$$(a^3+b^3)\div(a+b)=a^2-ab+b^2;$$
$$(a^5+b^5)\div(a+b)=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4;$$
$$(a^7+b^7)\div(a+b)=a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6.$$

Daqui poderemos formular o

VII Theorema. *A somma de duas potencias iguaes e impares de duas quantidades é sempre divisivel pela somma dessas quantidades.*

Nota. O discipulo deve verificar a exactidão das tres divisões precedentes.

DIVISORES E MULTIPLOS

104. Quando um numero divide outro sem deixar resto, chama-se **divisor** desse numero. Assim, 4 é divisor de 12, porque o divide exactamente.

O divisor de um numero chama-se tambem **factor** desse numero; de sorte que 2, 3, 4 e 6 são divisores e factores de 12, porque cada um desses numeros divide exactamente o numero 12.

105. Do mesmo modo a quantidade algebrica que divide exactamente outra, chama-se divisor ou factor dessa quantidade. Assim, a^2 é divisor ou factor de a^2x, porque esta quantidade se divide exactamente por a^2, pois $\frac{a^2x}{a^2}=x$.

106. Os numeros, quanto á sua divisibilidade, são ou primos ou multiplos.

Numeros primos são os que não podem ser divididos exactamente senão por si mesmos ou por 1. Assim, o numero 7 só é divisivel por 7 ou por 1.

Todos os numeros primos desde 1 até 101 são 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101.

Numeros multiplos são o producto de dois ou mais factores, e por isso podem ser divididos exactamente por esses factores. Assim, 6 é o producto de 2 vezes 3 ou de 3 vezes 2, e por isso,

além de ser divisivel por si mesmo e por 1, como os numeros primos, é ainda divisivel por 2 e por 3.

Os numeros multiplos são: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, etc.

Nota. O methodo para achar os numeros primos, e a exposição dos caracteres da divisibilidade dos numeros são pontos que se aprendem em Arithmetica. Em nossa Arithmetica Progressiva, ultima edição, elles se acham convenientemente desenvolvidos na parte competente.

Para facilitar a decomposição dos coefficientes numeraes, áquelles alumnos que não estudaram convenientemente a Arithmetica, vamos dar aqui o resumo dos mais importantes caracteres da divisibilidade dos numeros.

107. O factor de um numero é tambem factor de qualquer multiplo desse numero. Assim, se 3 divide 6, dividirá tambem 12, 18, 24, etc., que são multiplos de 6.

108. O factor de dois numeros divide tambem a somma e differença desses numeros. Assim, se 4 divide 12 e 16, dividirá tambem a sua somma, que é 12+16=28, e a sua differença que é 16−12=4.

109. Destes e de outros principios deduzimos os seguintes caracteres da divisibilidade dos numeros:

1° *Todo o numero par é divisivel por 2.*

Illustração. Os numeros pares terminam em 2, 4, 6, 8 ou 0. Ora, todos os numeros terminados nestes algarismos são ou 2 ou multiplos de 2, e por isso são divisiveis por 2. Os numeros impares, divididos por 2, deixam sempre resto.

2° *Todo o numero, cuja somma dos seus algarismos for divisivel por 3, será tambem divisivel por 3.*

Illustração. A somma dos algarismos do numero 147 é 1+4+7=12. Ora, como 12 é divisivel por 3, o numero 147 tambem o é.

3° *Todo o numero, cujos dois ultimos algarismos da direita forem divisiveis por 4, será tambem divisivel por 4.*

Illustração. O numero 328 compõe-se de 300+28. Ora, 4 divide 100, sem deixar resto; e, se divide 100, divide tambem 200, 300, etc., que são multiplos de 100. Portanto, 4 dividindo os dois ultimos algarismos que são 28, divide o numero inteiro.

4° *Todo o numero que terminar em 5 ou 0, será divisivel por 5.*

Illustração. Os numeros que terminarem em 5 ou 0, são todos multiplos de 5, como 10, 15, 20, 25, 30, etc., que são divisiveis por 5.

5° *Todo o numero par que for divisivel por 3, será tambem divisivel por 6.*

Illustração. Os primeiros numeros pares que são divisiveis por 3, são 6, 12, 18, 24, 30, etc.; ora, todos estes numeros são multiplos de 6, e por isso são divisiveis por 6.

6° Todo o numero, cuja somma dos seus algarismos for divisivel por 9, será tambem divisivel por 9.

Illustração. O numero 4356 é divisivel por 9, porque a somma dos seus algarismos, que é $4+3+5+6=18$, é tambem divisivel por 9.

7° Todo o numero terminado em 0 é divisivel por 10 ou por 5.

Illustração. Os numeros terminados em cifra só podem ser 10 ou multiplos de 10; assim, 30, 90, 180 são divisiveis por 10, e *tambem por 5.*

8° Todo o numero que for divisivel por dois numeros primos entre si, será tambem divisivel pelo seu producto.

Illustração. Os numeros que são divisiveis por 2 e por 3, tambem o são por $2\times3=6$; os que são divisiveis por 3 e por 4, tambem o são por $3\times4=12$, etc.

110. Vê-se nestes caracteres que um numero multiplo póde ter muitos divisores ou factores. Assim, 36 é divisivel por 2, porque é numero par; é divisivel por 3, porque a somma dos seus algarismos, que é $3+6=9$, é divisivel por 3; finalmente é ainda divisivel por 4, por 6, por 9, e tambem por $3\times4=12$, e por $2\times9=18$, porque se um numero se divide por dois numeros primos entre si, divide-se tambem pelo seu producto. (Arith. Progr. secção competente.)

111. Factorar um numero é decompol-o em seus factores primos, isto é, dividil-o por todos os seus factores primos até o quociente ficar 1.

Problema. Decompôr o numero 210 em todos os seus factores primos.

Solução. Começa-se a operação, dividindo 210 pelo menor numero primo que o divida exactamente. Dividindo-se 210 por 2, o quociente é 105; dividindo-se agora 105 por 3, o quociente é 35, dividindo-se 35 por 5, o quociente é 7, e dividindo-se 7 por 7, o quociente é 1. Os factores de 210 são 2, 3, 5 e 7.

Prova, $2\times3\times5\times7=210$.

210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Regra. *Para acharmos todos os factores primos de um numero, dividiremos esse numero pelo menor numero primo que não deixe resto; dividiremos depois o quociente por outro numero primo que tambem não deixe resto; e assim continuaremos a divisão até o quociente ficar 1. Os varios divisores serão os factores primos do numero dado.*

Decompôr os seguintes numeros em todos os seus factores primos:

1. 12.....	Resp.	$2\times2\times3$	6. 20............	Resp.	?
2. 15.....	»	3×5	7. 24...........	»	?
3. 21.....	»	3×7	8. 38...........	»	?
4. 26.....	»	2×13	9. 66...........	»	?
5. 36.....	»	$2\times2\times3\times3$	10. 100..........	»	?

Decomposição das quantidades algebricas

112. As quantidades algebricas, quanto á sua decomposição, dividem-se em primas e compostas.

Quantidade prima é a que não póde ser dividida exactamente senão por si mesma ou por 1. Assim, a, $b+c$, $d+x-y$, são quantidades primas, porque não tendo outro divisor além da unidade e da propria quantidade, não podem ser factoradas ou decompostas pela divisão.

113. Quantidade composta é o producto de dois ou mais factores. Assim, a quantidade ax é o producto de $a\times x$; a quantidade $ab+ac$ é o producto de $a(b+c)$; a quantidade $2a+6a^2+8a^3$ é producto de $2a(1+3a+4a^2)$, etc. Ora, sendo estas quantidades formadas pela multiplicação de dois factores, podem tambem pela divisão ser decompostas nesses mesmos factores.

114. Um factor chama-se **primo**, quando elle é uma quantidade prima; chama-se factor **composto**, quando elle é uma quantidade composta. Se dividimos ax^2 em dois factores a e x^2, o factor a será primo, e o factor x^2 será composto de $x\times x$. Se tomarmos ab como um factor, elle será um factor composto de $a\times b$; mas a e b, tomados separadamente, são factores primos.

115. Duas ou mais quantidades algebricas são primas entre si, quando nenhuma outra quantidade as póde dividir exactamente. Assim, ab e cd são quantidades primas entre si, porque não ha divisor que divida ambas exactamente.

116. Para decompormos um monomio, temos de factorar primeiro o seu coefficiente numeral, conforme o methodo exposto no n.° **111**, e depois factorar a parte litteral.

117. A decomposição da parte litteral não offerece difficuldade alguma, porque estando cada factor litteral expresso em uma lettra ou em um expoente, só teremos de escrever cada factor do monomio separado pelo signal $\times$.

Problema. Decompôr a quantidade $15a^2b$ em seus factores primos.

Solução. O coefficiente 15 decompõe-se em 3×5; a quantidade a^2 decompõe-se em $a\times a$; juntando-se ainda o factor b, ficará $3\times5\times a\times a\times b$.

$$15a^2b$$
$$3\times5\times a\times a\times b$$

Regra. *Para se factorar um monomio, decompõe-se o coefficiente numeral em seus factores primos, e a estes juntam-se todos os factores litteraes do monomio, ficando cada um separado pelo signal* $\times$.

Decompôr os seguintes monomios em seus factores primos:

1.	$12ab^2c$.	Resp.	$2\times2\times3\times a\times b\times b\times c$.
2.	$21a^2x^3y$.	»	$3\times7\times a\times a\times x\times x\times x\times y$.
3.	$35abc^2x$.	»	$5\times7\times a\times b\times c\times c\times x$.
4.	$26x^2y^3$.	»	?
5.	$39a^2m^2n$.	»	?

Decomposição dos polynomios

118. Problema. Decompôr a quantidade $x+ax$ em seus factores.

Solução. Vemos que x é factor commum aos dois termos do polynomio. Então, dividindo $x+ax$ por x, temos o quociente $1+a$. Os factores são pois, o divisor x e o quociente $1+a$. A quantidade $x+ax$ decompõe-se em $x\times(1+a)$ ou $x(1+a)$.

$$\begin{array}{r|l} x+ax & x \\ \hline x+ax & 1+a \\ \hline 0\quad 0 & \end{array}$$

Regra. *Divide-se o polynomio pelo maior monomio que divida exactamente cada um dos seus termos.*

Então, o divisor será um factor, e o quociente será outro.

Decompôr os seguintes polynomios em seus factores:

1.	$2x+2$.	Resp.	$2(x+1)$.
2.	$am+ac$.	»	$a(m+c)$.
3.	bc^2+bcd.	»	$bc(c+d)$.
4.	$4x^2+6xy$.	»	$2x(2x+3y)$.
5.	$6ax^2y+9bxy^2-12cx^2y$.	»	$3xy(2ax+3by-4cx)$.
6.	$5ax^2-35ax^3y+5a^2x^3y$.	»	$5ax^2(1-7xy+axy)$.
7.	$a^3cm^2+a^2c^2m^2-a^2cm^3$.	»	$a^2cm^2(a+c-m)$.
8.	$a+ab+ac$.	»	?
9.	$2ax+2ay-4az$.	»	?
10.	$3bcx+6bcx-3abc$.	»	?

119. Para decompormos em seus factores primos um binomio ou um trinomio, producto de dois ou mais polynomios, é necessario recorrermos aos seguintes principios baseados nos theoremas que já formulamos:

1° Um trinomio póde ser decomposto em dois factores binomios, quando os termos extremos são quadrados positivos, e o termo médio é duas vezes o producto das raizes quadradas dos extremos. Os factores serão a somma ou a differença das raizes quadradas dos termos extremos, segundo for mais ou menos o signal do termo médio (n.os **96** e **97**). Assim,

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)\ (a+b).$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)\ (a-b).$$

2° Um binomio que é a differença de dois quadrados, póde ser decomposto em dois factores, sendo um a somma, e o outro a differença das raizes dos dois quadrados (n.° **99**). Assim,

$$a^2-b^2=(a+b)\ (a-b).$$

3° Um binomio que é a differença de potencias iguaes de duas quantidades, póde ser decomposto, pelo menos, em dois factores, sendo um delles a differença das duas quantidades (n.° **99**). Assim,

$$x^3-y^3=(x-y)\ (x^2+xy+y^2)$$
$$x^5-y^5=(x-y)\ (x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4).$$

Neste caso, dividindo-se o binomio pelo factor conhecido, acha-se o outro factor no quociente.

4° Um binomio que é a differença de potencias iguaes e pares de duas quantidades, póde ser decomposto, pelo menos, em tres factores, um dos quaes é a somma, outro a differença das quantidades. Aqui deve entender-se que as potencias pares devem ser superiores ao quadrado (n.° **102**). Assim,

$$a^4-b^4=(a^2-b^2)\ (a^2+b^2)=(a+b)\ (a-b)\ (a^2+b^2).$$

Segundo este principio, o binomio a^4-b^4 póde ser decomposto nos factores (a^2-b^2) (a^2+b^2); ora, o factor a^2-b^2 póde ser tambem decomposto em $(a-b)$ $(a+b)$, e assim (a^4-b^4) póde ser decomposto nos factores $(a-b)$, $(a+b)$ e (a^2+b^2).

5° Um binomio que é a somma de potencias iguaes e impares de duas quantidades, póde ser decomposto, pelo menos, em dois factores, sendo um dos factores a somma das quantidades (n.° **102**). Assim,

$$a^3+b^3=(a+b)\ (a^2-ab+b^2).$$
$$a^5+b^5=(a+b)\ (a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4).$$

Decompôr as seguintes quantidades algebricas em seus factores primos:

1.	$x^2+2xy+y^2$.	Resp.	$(x+y)\ (x+y)$.
2.	$9a^2+12ab+4b^2$.	»	$(3a+2b)\ (3a+2b)$.
3.	$4+12x+9x^2$.	»	$(2+3x)\ (2+3x)$.
4.	$m^2-2mn+n^2$.	»	$(m-n)\ (m-n)$.
5.	x^2-y^2.	»	$(x-y)\ (x+y)$.
6.	y^2-1.	»	$(y-1)\ (y+1)$.
7.	$9m^2-16n^2$.	»	$(3m-4n)\ (3m+4n)$.

8. a^5-b^5. Resp. $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$.
9. $a^2b^2-c^2d^2$. Resp. ?
10. $4x^2-20xz+25z^2$. » ?
11. $a^2-2abx+b^2x^2$. » ?
12. x^5+y^5. » ?

120. Muitas vezes um binomio ou trinomio contém mais factores além dos que se podem conhecer pelos principios já expostos; neste caso, é necessario decompôr a quantidade em dois factores, de sorte que um dos factores seja o binomio ou trinomio nas condições de ser decomposto nos factores referidos. Assim, $a^2x-x^3=x(a^2-x^2)$; ora, a^2-x^2 decompondo-se em $(a-x)(a+x)$, então a^2x-x^3 se decompõe em $x(a-x)(a+x)$.

13. $7a^2-14ax+7x^2$. Resp. $7(a-x)(a-x)$.
14. ax^2-ay^2. » ?
15. $cm^2+2cmn+cn^2$. » ?
16. ay^2-a. » ?

121. Quando o primeiro termo de um trinomio é um quadrado, e o coefficiente do segundo termo é a somma de duas quantidades, cujo producto é o terceiro termo, póde ser decomposto em dois factores binomios. Assim, $a^2+7a+12$ é um trinomio que tem o primeiro termo quadrado; o coefficiente do segundo termo é a somma das quantidades $3+4=7$, cujo producto $3\times4=12$ é o terceiro termo, e por isso se decompõe em $(a+3)(a+4)$.

17. x^2+5x+6. Resp. $(x+5)(x+3)$.
18. x^2-5x+6. » $(x-2)(x-3)$.
19. $x^2-9x+20$. » $(x-4)(x-5)$.
20. $x^2+13x+40$. » $(x+5)(x+8)$.
21. x^2-6x+8. » $(x-2)(x-4)$.

122. A decomposição das quantidades algebricas, além de outras vantagens, auxilia a achar mais rapidamente o resultado das operações. Se quizermos, por exemplo, multiplicar $x^2+2xy+y^2$ por $x-y$, e depois dividir o producto por $x+y$, teriamos de fazer uma longa multiplicação e depois uma longa divisão, ambas as operações sujeitas a enganos. Decompondo, porém, $x^2+2xy+y^2$ em seus factores $(x+y)(x+y)$, e indicando as operações, temos

$$\frac{(x+y)(x+y)(x-y)}{x+y}=(x+y)(x-y)=x^2-y^2.$$

Nesta expressão, como o factor $x+y$ é commum ao dividendo e ao divisor, elimina-se ou cancella-se em ambos os termos, e o resultado é $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$. (3° Theorema).

MAXIMO DIVISOR COMMUM

123. Divisor é uma quantidade que divide outra exactamente.

124. Divisor commum de duas ou mais quantidades é uma quantidade que as divide a todas exactamente. Assim, a é divisor commum de ax, ab e ac, porque divide exactamente essas quantidades.

125. Maximo divisor commum de duas ou mais quantidades é a maior quantidade que divide todas ellas exactamente.

126. Duas ou mais quantidades podem ter muitos divisores communs; assim, 16 e 24 teem tres divisores communs, que são 2, 4 e 8; ora, sendo 8 o maior dos tres, chama-se por isso maximo divisor commum de 16 e 24.

E' necessario que o discipulo comprehenda que 8 não é só o maximo divisor commum de 16 e 24; elle póde ser tambem maximo divisor commum de muitos outros numeros dados, como 32, 40, 48, etc.

Problema. Qual é o maximo divisor commum de $6abx$, $10acx$ e $4adx$?

Solução. Decompondo-se as tres quantidades em seus factores primos, nota-se logo que 2, a e x são as unicas quantidades que entram como factores na composição de todas ellas, e por isso 2, a e x são os divisores communs das tres quantidades. O maximo divisor commum é o producto continuado destes divisores, isto é, $2\times a\times x=2ax$.

Operação

$$6abx=2\times3\times a\times b\times x.$$
$$10acx=2\times5\times a\times c\times x.$$
$$4adx=2\times2\times a\times d\times x.$$
$$2ax.$$

Demonstração. Já vimos na secção **109**, 8° caracter que, se um numero se dividir por dois ou mais numeros primos entre si, se dividirá tambem por qualquer producto desses numeros. Assim, se 30 se divide por 2, por 3 e por 5, dividir-se-á tambem pelos varios productos desses factores, que são $2\times3=6$, $3\times5=15$ e $2\times3\times5=30$. Não sendo 30 divisivel por nenhum outro numero primo, segue-se que o producto continuado dos divisores 2, 3 e 5 será o seu maximo divisor.

Do mesmo modo, se as quantidades $6abx$, $10acx$ e $4adx$ se dividem por 2, por a e por x, tambem serão divididas pelos productos $2\times a=2a$, $2\times x=2x$ e $2\times a\times x=2ax$. Ora, como as tres quantidades não teem nenhum outro divisor

primo e commum a ellas senão 2, a e x, segue-se que o seu maximo divisor commum é $2\times a\times x=2ax$. Portanto,

O maximo divisor commum de duas ou mais quantidades é o producto continuado de todos os factores primos e communs a ellas.

Regra. *Decompôem-se as quantidades dadas em seus factores primos, e o producto continuado de todos os factores que forem communs a ellas, será o seu maximo divisor commum.*

Nota. Por abreviatura usaremos das iniciaes **M. d. c.** para significar maximo divisor commum.

Problema. Qual é o **M. d. c.** de $4a^2x^2$, $6a^2x$, e $10ax^3$?

Solução. Os factores communs ás tres quantidades são 2, a, a e x. O factor a sendo duas vezes factor commum, é o mesmo que $a\times a=a^2$; e o maximo divisor commum é $2a^2x$.

$$4a^2x^2=2\times2\times a\times a\times x\times x.$$
$$6a^2x=2\times3\times a\times a\times x.$$
$$10a^3x=2\times5\times a\times a\times a\times x.$$
$$2\times a^2\times x=2a^2x.$$

Achar o **M. d. c.** das seguintes quantidades :

		Resp.
1.	$4a^2x^2$ e $10ax^3$.	$2ax^2$.
2.	$9abc^3$ e $12bc^4x$.	» $3bc^3$.
3.	$4a^3b^2x^5y^3$ e $8a^5x^2y^2$.	» $4a^3x^2y^2$.
4.	$3a^4y^3$, $6a^5x^3y^5$ e $9a^6y^4z$.	» $3a^3y^3$.
5.	$8ax^2y^4$, $12x^5y^2$ e $24a^2x^2y^3$.	» ?
6.	$3axy$, $15a^2x^3z$ e $5a^3x^2y$.	» ?

Achar o maximo divisor das quantidades por meio da divisão continuada

127. Podemos tambem achar o **M. d. c.** de duas ou mais quantidades por meio da divisão continuada, isto é, por uma successão de divisões seguidas.

Problema. Qual é o **M. d. c.** de $30x$ e $42x$?

Solução. Dividindo a quantidade maior pela menor o quociente é 1, o resto é $12x$. Dividindo agora o primeiro divisor $30x$ pelo primeiro resto $12x$, o quociente é 2, e o resto $6x$. Dividindo ainda o segundo divisor pelo segundo resto, o quociente é 2, e não ha resto.

O ultimo divisor $6x$ é o **M. d. c.** de $30x$ e $42x$ porque não deixou resto.

Operação

$$\begin{array}{r|l} 42x & 30x \\ 30x & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30x & 12x \\ 24x & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12x & 6x \\ 12x & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Demonstração. Temos de provar agora os dois pontos seguintes :

1° Que $6x$ é um divisor commum de $30x$ e $42x$.

2° Que $6x$ é o maximo divisor commum de $30x$ e $42x$.

Primeiro. Vamos provar que $6x$ é um divisor commum de $30x$ e $42x$. Pela ultima divisão do problema acima, vimos que $6x$ é contido 2 vezes em $12x$; ora, como $6x$ divide $12x$, dividirá tambem o producto de $12x\times2$ ou $24x$. Tambem se $6x$ é divisor de si mesmo e de $24x$, será tambem divisor da somma de $6ax+24x=30x$, que é a quantidade menor.

Pela mesma razão, se $6x$ divide $12x$ e $30x$, dividirá a somma de $12x+30x=42x$, que é a quantidade maior. Logo $6x$ é um divisor commum de $30x$ e $42x$.

Segundo. Vamos agora provar que $6x$ é o maximo divisor commum de $30x$ e $42x$.

Se o maximo divisor commum não é $6x$ então é maior ou menor do que $6x$. Mas nós já provamos que $6x$ é um divisor commum das quantidades dadas, e por isso nenhuma quantidade menor do que $6x$ poderá ser o **M. d. c.** dellas.

Suppondo que o **M. d. c.** seja maior do que $6x$, então como elle divide $30x$ e $42x$ dividirá tambem a differença de $42x-30x=12x$, e se divide $12x$, dividirá o producto de $12x\times2=24x$.

Dividindo $24x$ e $30x$ dividirá a differença destas quantidades que é $30x-24x=6x$. Ora $6x$, para não deixar fracção no quociente, só póde ser dividido por si mesmo ou por uma quantidade menor do que $6x$. Logo, $6x$ é o maximo divisor commum de $30x$ e $42x$.

Regra. *Divide-se a quantidade maior pela menor; depois divide-se o primeiro divisor pelo primeiro resto, e o segundo divisor pelo segundo resto, e assim por diante até a divisão não deixar resto.*

O ultimo divisor será o maximo divisor commum.

Nota. Quando ha mais de duas quantidades, acha-se o **M. d. c.** das duas menores, depois o **M. d. c.** do divisor achado e da terceira quantidade, e assim por diante. De sorte que se quizermos achar o **M. d. c.** de $48a$. $72a$ e $108a$, acharemos primeiro o **M. d. c.** de $48a$ e $72a$ que é $24a$, e depois acharemos o **M. d. c.** de $24a$ e $108a$, que é $12a$. Assim, o **M. d. c.** de $48a$, $72a$ e $108a$ é $12a$.

Maximo divisor commum dos polynomios

128. Para acharmos o maximo divisor commum dos polynomios, podemos empregar os mesmos processos que já executamos para achar o maximo divisor commum dos binomios a saber :

1° Decomposição das quantidades em seus factores primos.

2° Divisão continuada das quantidades.

Começaremos pelo primeiro

Problema. Qual é o **M. d. c.** de $a^2-2ab+b^2$ e a^2-b^2 ?

Solução. A primeira quantidade decompõe-se em $(a-b)$ $(a-b)$, e a segunda, em $(a-b)$ $(a+b)$; ora, como $(a-b)$ é o unico divisor commum a ambas, é tambem o seu maximo divisor commum. (Vêde o theorema segundo e o terceiro).

A regra, como é a mesma dos monomios, não é necessario ser aqui repetida.

Operação

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)\ (b-b)$$
$$a^2-b^2=(a-b)\ (a+b)$$

Achar o **M. d. c.** dos seguintes polynomios :

1. $a^2+2ab+b^2$ e a^2-b^2. Resp. $a+b$.
2. x^2-y^2 e x^3+y^3. » $x+y$.
3. $a^2x^2-4ax+4$ e $ax-2$. » $ax-2$.
4. $4c^2-12cx+9x^2$ e $4c^2-9x^2$. » ?
5. x^5+y^5 e $x^2+2xy+y^2$. » ?
6. b^2-4 e b^2+4b+4. » ?
7. $5a^2+5ax$ e a^2-x^2. » ?
8. x^3-c^2x e $x^2+2cx+c^2$. » ?

129. Vamos achar agora o **M. d. c.** de dois polynomios por meio da divisão continuada dessas quantidades.

Problema. Qual o **M. d. c.** de $4a^3-21a^2+15a+20$ e a^2-6a+8?

Solução. Dividindo-se a quantidade maior pela menor, o quociente é $4a+3$, e o resto é $a-4$. Dividindo-se o primeiro divisor pelo primeiro resto, o quociente é $a-2$, e não deixa resto. O ultimo divisor $a-4$ é o **M. d. c.** das duas quantidades.

Este processo apresenta ás vezes muita difficuldade para os discipulos, principalmente quando é necessario omittir na divisão os factores que não são communs a todas as quantidades dadas. Por isso recommendamos de preferencia o primeiro processo, ao qual juntamos os exercicios para a pratica.

Operação

$$\begin{array}{r|l} 4a^3-21a^2+15a+20 & a^2-6a+8 \\ \hline 4a^3-24a^2+32a & 4a+3 \\ \hline +3a^2-17a+20 & \\ +3a^2-18a+24 & \\ \hline a-4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} a^2-6a+8 & a-4 \\ \hline a^2-4a & a-2 \\ \hline -2a+8 & \\ -2a+8 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

MINIMO MULTIPLO COMMUM

130. Multiplo de uma quantidade é qualquer outra quantidade que a contém um exacto numero de vezes. Assim, 6 é multiplo de 2, porque contém 3 vezes o numero 2; $20x$ é multiplo de $5x$, porque contém 4 vezes $5x$.

131. Multiplo commum de duas ou mais quantidades é qualquer outra quantidade que contém todas ellas um exacto numero de vezes. Assim, $12y$ é multiplo commum de $2y$, $3y$, $4y$ e $6y$, porque contém 6 vezes $2y$, 4 vezes $3y$, 3 vezes $4y$ ou 2 vezes $6y$, e por isso póde dividir-se exactamente por todas estas quantidades.

132. Minimo multiplo commum de duas ou mais quantidades é a menor quantidade que contem cada uma dellas um exacto numero de vezes. Assim, $10x$ é o minimo multiplo commum de $2x$ e $5x$, porque nenhuma outra quantidade menor do que $10x$, poderá conter exactamente estas quantidades um exacto numero de vezes.

Duas ou mais quantidades teem um numero illimitado de multiplos communs; assim, os multiplos communs de 4 e 6 são 12, 24, 36, 48, 60 e todos os numeros que forem crescendo nesta progressão. Ora, é evidente que 12 é o menor de todos, e por isso 12 é o minimo multiplo commum de 4 e 6.

133. Qualquer quantidade contém outra um exacto numero de vezes, se tiver todos os factores primos dessa quantidade. Assim, 30 contém o numero 6 cinco vezes exactas, porque sendo composto de $2\times3\times5$, tem os factores 2 e 3 de que se compõe o numero 6. $(2\times3=6)$. Portanto, *para que uma quantidade contenha outra exactamente, bastará sómente que ella tenha todos os factores primos dessa quantidade.*

134. Para que qualquer quantidade contenha exactamente duas ou mais quantidades, é necessario que ella contenha todos os differentes factores primos dessas quantidades. E para ser a menor quantidade que exactamente as contenha, deve não ter nenhum outro factor além dos que tiverem essas quantidades; e por isso *o minimo multiplo commum de duas ou mais quantidades tem todos os differentes factores primos dessas quantidades e não contém nenhum outro factor.*

O minimo multiplo commum de a^2bc e acx é a^2bcx, porque tem todos os factores de cada uma dessas quantidades, e não contém nenhum outro factor estranho.

Nota. Por abreviatura, usaremos das iniciaes **M. m. c.** para significar minimo multiplo commum.

Problema. Qual é o **M. m. c.** de a^2x, bx e abc?

Solução. Escrevem-se as quantidades a^2x, bx e abc em linha e sublinham-se. Vê-se logo que o factor a é divisor de duas dellas. Escreve-se a como divisor ao lado direito, e dividem-se as duas quantidades a^2x e abc pelo factor a, e os quocientes ax e bc, e a quantidade bx, que não pôde ser dividida por a, escrevem-se em baixo da linha para nova divisão.

Nestes novos termos vê-se que b é factor de bx e bc; dividem-se então estes dois termos por b, e os quocientes x e c escrevem-se debaixo bem como o termo ax que não pôde ser dividido por b. Assim se continúa a dividir todos os termos pelos seus divisores, até que todos fiquem reduzidos a 1.

Os factores primos destas tres quantidades são a, b, x, a e c; o minimo multiplo commum é pois o producto de todos estes factores, isto é, $a\times b\times x\times a\times c=a^2bcx$.

Operação

a^2x,	bx,	abc	a
ax,	bx,	bc	b
ax,	x,	c	x
a,	1,	c	a
1,	1,	c	c
1,	1,	1	

$a\times b\times x\times a\times c=a^2bcx.$

Demonstração. Para que a^2bcx seja o minimo multiplo commum de a^2x, bx e abc, é necessario que contenha todos os factores primos destas tres quantidades, e nenhum outro factor além delles. Examinando estas tres quantidades, vemos que os seus differentes factores são a, a, b, c e x. Ora, todos estes factores se acham contidos em a^2bcx; além disso vemos tambem que esta quantidade não tem nenhum outro factor além de a, a, b, c e x; logo, a^2bcx é o minimo multiplo commum de a^2x, bx e abc.

Regra. *Para se achar o* **M. m. c.** *de duas ou mais quantidades, escrevem-se todas em linha separadas por virgulas e sublinham-se. Acha-se um factor primo que divida exactamente ao menos duas quantidades que forem exactamente divisiveis, e escrevem-se debaixo os quocientes, bem como as quantidades que não forem exactamente divisiveis por elle.*

Divide-se esta nova linha de quantidades por um factor primo, que divida duas ou mais quantidades, e assim se procede em seguida; e as quantidades primas dividem-se por si mesmas, para que todos os factores fiquem á direita, e todos os quocientes sejam 1. O continuado producto de todos os factores primos será a resposta.

Nota. Quando duas ou mais quantidades são primas entre si, o **M. m. c.** de todas ellas é o seu producto continuado. Assim, o **M. m. c.** de ab, cd e xy é $abcdxy$.

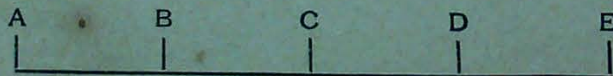
O discipulo deve estudar este processo em nossa Arithmetica Progressiva, para saber achar facilmente o minimo multiplo commum dos numeros.

Achar o minimo multiplo commum

1. de $4a^2$, $3a^3x$ e $6ax^2y^3$.	Resp.	$12a^3x^2y^3$.
2. de $12a^2x^3$, $6a^3$ e $8x^4y^2$.	»	$24a^3x^4y^2$.
3. de $18c^2nz^3$, $9n^4z$ e $12c^3n^2z^3$.	»	$36c^3n^4z^3$.
4. de 15, $6xz^2$, $9x^2z^4$ e $18cx^3$.	»	$90cx^3z^4$.
5. de $6a$, $5a^2b$ e $25abc^2$.	»	?
6. de $3a^2b$, $9abc$ e $27a^2x^2$.	»	?
7. de $4a^2x^2y^2$, $8a^3xy$, $16a^4y^3$ e $24a^5y^4x$.	»	?
8. de $3a^3b^2$, $9a^2x^2$, $18a^4y^3$ e $3a^2y^2$.	»	?

FRACÇÕES ALGEBRICAS

135. Em Arithmetica, uma fracção é uma ou mais partes iguaes de uma unidade ou de um todo.

```
A    B    C    D    E
|____|____|____|____|
```


Assim, se tomarmos, por exemplo, a linha A E, e a dividirmos em quatro partes iguaes, qualquer numero destas partes será uma fracção da linha. Assim, a parte entre A e B é um quarto da linha; as partes entre A e C são dois quartos da linha; as partes entre A e D são tres quartos da linha, e as partes entre A e E são quatro quartos da linha ou a linha inteira.

136. Exprime-se a fracção com dois numeros separados por um risco horisontal, como $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ que se leem: um quarto, dois quartos, tres quartos, quatro quartos.

137. Estes dois numeros chamam-se **termos** da fracção; o termo debaixo chama-se **denominador**, e mostra em quantas partes foi dividida a unidade; o termo de cima chama-se **numerador**, e mostra quantas partes da unidade contém a fracção. Assim, $\frac{3}{4}$ mostra que a unidade foi dividida em 4 partes iguaes, e que a fracção contém 3 dessas partes.

Numerador 3
Denominador 4

138. Em Algebra, uma fracção é considerada como uma divisão, na qual o numerador é o dividendo, o denominador é o divisor, e o valor da fracção é o quociente. Assim, se dividirmos 3 por 4, o quociente será $\frac{3}{4}$, isto é, a quarta parte de 3, e por isso esta fracção se lê, em Algebra: « *tres dividido por quatro.* »

139. A **fracção algebrica** é pois o resultado da divisão do numerador pelo denominador, e lê-se como se estes termos estivessem separados pelo signal $\div$. Assim,

$\frac{a}{b}$ lê-se: « a dividido por b. »

$\frac{2a+x}{6c}$ lê-se: « dois a e mais tres x dividido por seis c. »

$\frac{2d}{x-y}$ lê-se: « dois d dividido por x e menos y. »

140. **Quantidade inteira** é a que contém uma ou mais unidades sem fracção; como 6, $3ab$, $15x$, etc.

141. **Quantidade mixta** é a que contém uma ou mais unidades e uma fracção; como $a+\frac{x}{y}$, $2ab-\frac{b}{c}$, etc.

142. Ha cinco theoremas que são communs ás fracções algebricas e ás fracções arithmeticas, e por isso devemos conhecel-os perfeitamente. Estes theoremas são os seguintes:

143. Theorema I. *Se multiplicarmos o numerador por um numero inteiro, sem alterarmos o denominador, o valor da fracção augmentará tantas vezes quantas forem as unidades do multiplicador.*

Demonstração. Se multiplicarmos o numerador de $\frac{2}{7}$ por 3 sem alterarmos o denominador, teremos $\frac{6}{7}$. Ora, $\frac{2}{7}$ e $\frac{6}{7}$ teem o mesmo denominador e portanto exprimem partes do mesmo tamanho; mas $\frac{6}{7}$ tem 3 vezes o numerador de $\frac{2}{7}$, e é por conseguinte, 3 vezes maior. O mesmo se póde demonstrar com qualquer outra fracção.

$$\frac{2\times 3}{7}=\frac{6}{7}.$$

144. Theorema II. *Se dividirmos o numerador de uma fracção, sem alterarmos o denominador, o valor da fracção diminuirá na razão das unidades do divisor.*

Demonstração. Se dividirmos o numerador de $\frac{4}{5}$ por 2, teremos $\frac{2}{5}$. Ora, $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{5}$ teem o mesmo denominador, e por isso exprimem partes do mesmo tamanho. Mas o numerador de $\frac{2}{5}$ é só a metade do numerador de $\frac{4}{5}$, e deste modo exprime só a metade das partes que teem $\frac{4}{5}$, e por isso ficou na metade do seu valor. O mesmo se pode demonstrar com qualquer outra fracção.

$$\frac{4\div 2}{5}=\frac{2}{5}.$$

145. Theorema III. *Se multiplicarmos o denominador de uma fracção por um numero inteiro, sem alterarmos o numerador, o valor da fracção diminuirá na razão das unidades do multiplicador.*

Demonstração. Se multiplicarmos o denominador de $\frac{3}{4}$ por 2, teremos $\frac{3}{8}$. Ora, cada uma dessas fracções tem o mesmo numerador, e por isso ambas exprimem o mesmo numero de partes. Mas, na segunda fracção as partes teem a metade do tamanho das da primeira fracção, porque aquellas são quartos e estas são oitavos, e deste modo o valor da segunda fracção é a metade do da primeira. O mesmo se póde demonstrar com qualquer outra fracção.

$$\frac{3}{4\times 2}=\frac{3}{8}.$$

146. Theorema IV. *Se dividirmos o denominador de uma fracção por um numero inteiro, sem alterarmos o numerador, o valor da fracção augmentará na razão das unidades do divisor.*

Demonstração. Se dividirmos o denominador de $\frac{2}{9}$ por 3, teremos $\frac{2}{3}$. Ora, as fracções $\frac{2}{9}$ e $\frac{2}{3}$ tendo numeradores iguaes, exprimem o mesmo numero de partes da unidade; mas como as partes da primeira fracção são nonos, e as da segunda são terços, e como cada terço é igual a tres nonos, segue-se que o valor da segunda fracção será o triplo do da primeira.

$$\frac{2}{9\div 3}=\frac{2}{3}.$$

147. Theorema V. *Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero, mudaremos a fórma dessa fracção, mas não lhe alteraremos o valor.*

Demonstração. Se multiplicarmos o numerador de uma fracção por qualquer numero, o seu valor augmentará tantas vezes quantas forem as unidades do multiplicador (Theor. I.) e se multiplicarmos o denominador pelo mesmo numero, o valor da fracção descerá na razão das unidades do multiplicador. (Theor. II.) Ora, desde que o accrescimo da multiplicação do numerador é igual ao decrescimo da multiplicação do denominador, segue-se que o valor da fracção não ficará alterado.

Tambem se dividirmos o numerador de uma fracção por qualquer numero, o valor da fracção diminuirá na razão das unidades do divisor; (Theor. II.) e se dividirmos o denominador, o valor crescerá na mesma razão (Theor. IV.) Se ambos os termos forem divididos pelo mesmo numero, a diminuição da divisão do numerador será igual ao augmento da divisão do denominador, e assim, o valor da fracção ficará inalteravel. Vêde o capitulo denominado Demonstrações algebricas, onde este ponto se acha demonstrado algebricamente.

148. Muitas vezes o numerador de uma fracção algebrica exprime tambem um certo numero de fracções iguaes; assim, a fracção $\frac{4}{5}$ póde ser considerada $\frac{1}{5}$ tomado 4 vezes, $\frac{1}{5}\times 4=\frac{4}{5}$; a fracção $\frac{a}{b}$ póde ser considerada $\frac{1}{b}$ tomada a vezes, pois $\frac{1}{b}\times a=\frac{a}{b}$.

149. Antes de entrarmos nos diversos processos das fracções algebricas, devemos conhecer perfeitamente as quatro transformações que mudam a fórma de uma fracção sem lhe alterar o valor. Estas transformações são as seguintes:

1° Reduzir fracções á expressão mais simples.

2° Transformar fracções em quantidades inteiras ou mixtas.

3° Transformar quantidades inteiras ou mixtas em fracções.

4° Reduzir fracções ao minimo denominador commum.

Reduzir fracções algebricas á expressão mais simples

150. Reduzir uma fracção algebrica á sua expressão mais simples é cancellar ou tirar os factores communs ao numerador e denominador, para tornal-a mais simples, mas com o mesmo valor.

151. As fracções algebricas que tiverem factores communs ao numerador e ao denominador, podem ser reduzidas a uma expressão mais simples; assim, $\frac{ax}{ay}$ póde ser reduzida a $\frac{x}{y}$, porque o factor a é commum a ambos os termos. As fracções que não tiverem factores communs, não podem ser reduzidas; assim, $\frac{a}{b}$ e $\frac{ax}{by}$ não podem ser simplificadas.

Problema. Reduzir $\frac{5ab^2}{15abx^2}$ á sua expressão mais simples.

Solução. Decompondo os dois termos da fracção em seus factores primos, vemos que os factores 5, a e b são communs ao numerador e ao denominador. Cancellando estes factores communs, a fracção ficará reduzida a $\frac{b}{3x^2}$.

$$\frac{5ab^2}{15abx^2}=?$$

$$\frac{\cancel{5}\times\cancel{a}\times\cancel{b}\times b}{3\times\cancel{5}\times\cancel{a}\times\cancel{b}\times x\times x}=\frac{b}{3x^2}$$

Demonstração. Cancellando no numerador os factores 5, a e b é o mesmo que dividir este termo por $5ab$. Cancellando tambem no denominador os factores 5, a e b é o mesmo que dividil-o por $5ab$. Ora, dividindo-se ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero ou quantidade, não se altera o valor da fracção como ficou demonstrado no **n. 147.**

Na soluçaó deste problema, vemos que 5, a e b são os unicos factores primos communs ao numerador e ao denominador, e por isso o producto $5ab$ é o **M. d. c.** dos dois termos da fracção. (**n. 126**) Temos portanto as duas regras seguintes para a reducção de fracções.

Regra. *Para se reduzir uma fracção algebrica a uma expressão mais simples, cancellam-se todos os factores communs ao numerador e ao denominador.*

Ou então

Dividem-se ambos os termos da fracção pelo seu maximo divisor commum.

Reduzir cada uma das seguintes fracções á sua expressão mais simples:

1.	$\frac{4a^3x^2}{6a^4}$.	Resp. $\frac{2x^2}{3a}$.		7.	$\frac{3xy}{9x^2y}$.	Resp. ?
2.	$\frac{6a^2x^2}{8ax^3}$.	» $\frac{3a}{4x}$.		8.	$\frac{12a^2bc^2}{4abcd}$.	» ?
3.	$\frac{6a^4x^2}{8a^2xy^4}$.	» $\frac{3a^2x^2}{4y^4}$.		9.	$\frac{17b^2cxy}{51b^2cxy}$.	» ?
4.	$\frac{9x^4y^3z^5}{12x^3y^4z^5}$.	» $\frac{3x}{4y}$.		10.	$\frac{60a^2b^3c^2d^2}{48a^4b^4c^3d}$.	» ?
5.	$\frac{4abcy}{12abc}$.	» $\frac{y}{3}$.		11.	$\frac{12a^4b^2x}{18a^2b^2y}$.	» ?
6.	$\frac{18a^2b}{3ac}$.	» $\frac{6ab}{c}$.		12.	$\frac{4ax^2}{5a^2bx^2}$.	» ?

13. Simplificar $\frac{4a^2+6a^4}{10a^3b^2+8a^2c}$ Resp. $\frac{4a^2+6a^4}{10a^3b^2+8a^2c}=\frac{2a^2(2+3a^2)}{2a^2(5ab^2+4c)}=\frac{2+3a^2}{5ab^2+4c}$

14. Simplificar $\frac{2a^2cx^2+2acx}{10ac^2x}$. Resp. $\frac{ax+1}{5c}$.

15. Simplificar $\frac{8a^2b}{12ab^2+4abc}$. » $\frac{2a}{3b+c}$.

16. Simplificar $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$. » $\frac{x+y}{x-y}$.

17. Simplificar $\frac{a+1}{a^2+2a+1}$. » $\frac{1}{a+1}$.

18. Simplificar $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$. » $\frac{a+b}{a-b}$.

Transformar fracções algebricas em quantidades inteiras ou mixtas

152. Muitas vezes uma expressão algebrica tem a fórma de uma fracção, mas contém uma quantidade inteira ou mixta; é necessario pois saber transformar esta expressão em sua fórma inteira.

Problema. Transformar $\frac{3ax+b^2}{x}$ em uma quantidade inteira ou mixta.

Solução. Desde que o numerador é um dividendo, e o denominador um divisor, divide-se aquelle por este, isto é, divide-se $3ax+b^2$ por x; o quociente $3a$ será a parte inteira. O resto b^2, como não se póde dividir por x, escreve-se em forma de fracção e junta-se á parte inteira, que ficará $3a+\frac{b^2}{x}$.

Operação

$$\begin{array}{l|l} 3ax+b^2 & x \\ \cline{2-2} 3ax & 3a+\frac{b^2}{x} \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Regra. *Divide-se o numerador pelo denominador, e o quociente será a parte inteira; se houver resto, escreve-se sobre o divisor como parte fraccionaria, e junta-se á parte inteira.*

Reduzir as seguintes fracções a quantidades inteiras ou mixtas:

1. $\frac{ab+b^2}{a}$. Resp. $b+\frac{b^2}{a}$.
2. $\frac{cd-d^2}{d}$. » $c-d$.
3. $\frac{a^2-x^2}{a+x}$. » $a-x$.
4. $\frac{2a^2x-x^3}{a}$. » $2ax-\frac{x^3}{a}$.
5. $\frac{4ax-2x^2-a^2}{2a-x}$. » $2x-\frac{a^2}{2a-x}$.
6. $\frac{ax-x^2}{x}$. » $a-x$.
7. $\frac{ax-a^2}{a}$. Resp. ?
8. $\frac{ab-2a^2}{b}$. » ?
9. $\frac{a^2-x^2}{a+x}$. » ?
10. $\frac{x^3-y^3}{x-y}$. » ?
11. $\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b}$. » ?
12. $\frac{2a+4b+c}{2}$. » ?

Transformar uma quantidade mixta em fórma de uma fracção

153. Problema. Transformar $a+\frac{b}{c}$ em uma fracção.

Solução. Multiplicando-se a parte inteira pelo denominador da fracção ficará ac, isto é, c vezes maior; mas dando-se-lhe o denominador c, ficará com o seu valor primitivo, e na forma de fracção. Juntando-se agora a fracção $\frac{b}{c}$, ficará $\frac{ac+b}{c}$.

Operação

$$a+\frac{b}{c}=?$$

$$\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}.$$

Regra. *Multiplica-se a parte inteira pelo denominador da fracção, e junta-se ao numerador com o signal competente, e o resultado escreve-se sobre o denominador.*

154. Antes de resolvermos os exercicios deste processo, precisamos reflectir sobre o modo por que temos de operar com os signaes das fracções, para não acharmos difficuldade alguma.

Os signaes prefixos aos termos de uma fracção dominam só esses termos; e o signal prefixo á fracção domina a fracção inteira. Assim, na fracção $-\frac{a^2-b^2}{x+y}$, o signal de a^2 que é o primeiro termo do numerador, é *mais* subentendido; o signal de b^2 é *menos*; o signal de ambos os termos do denominador é *mais*; mas o signal da fracção, tomada como um todo, é *menos*.

Como uma fracção póde estar unida á parte inteira pelo signal *mais* ou pelo signal *menos*, precisamos saber operar com os signaes, quando dermos a uma quantidade mixta uma fórma fraccionaria.

Vamos resolver os dois casos seguintes:

1° Caso. Transformar $3a+\frac{ax-a}{x}$ em uma fórma fraccionaria.

$$3a+\frac{ax-a}{x}=\frac{3ax}{x}+\frac{ax-a}{x}=\frac{3ax+ax-a}{x}=\frac{4ax-a}{x}.$$

Solução. Neste caso, como o signal que liga a fracção á parte inteira é +, não ha difficuldade alguma, porque os signaes dos termos da fracção se conservam inalteraveis.

2° Caso. Transformar $4a-\frac{a-b}{3c}$ em uma fórma fraccionaria.

$$4a-\frac{a-b}{3c}=\frac{12ac}{3c}-\frac{a-b}{3c}=\frac{12ac-(a-b)}{3c}=\frac{12ac-a+b}{3c}.$$

Solução. Neste caso, como a fracção está unida á parte inteira pelo signal —, é necessario que, quando juntarmos o numerador da fracção ao numerador da parte inteira, troquemos os signaes de todos os termos do numerador da fracção. (Vêde n.° 61.)

Transformar as seguintes quantidades mixtas em fracções:

1. $5c+\frac{a-b}{2x}$. Resp. $\frac{10cx+a-b}{2x}$.
2. $5c-\frac{a-b}{2x}$. » $\frac{10cx-a+b}{2x}$.
3. $3x+\frac{c-d}{xy}$. » $\frac{3x^2y+c-d}{xy}$.
4. $3x-\frac{4x^2-5}{5x}$. » $\frac{11x^2+5}{5x}$.
5. $8y+\frac{3a-y^2}{5y}$. » $\frac{39y_2+3a}{5y}$.

6. $x+y+\frac{x}{x+y}$. Resp. $\frac{x^2+2xy+y+x}{x+y}$.

7. $z-1+\frac{1-z}{1+z}$. » $\frac{z^2-z}{z+1}$.

8. $\frac{4y}{2x+z}-5$. » $\frac{4y-10x-5z}{2x+z}$.

9. $3a^2x-\frac{a^2x^2-a^3}{x}$. » $\frac{2a^2x^2+a^3}{x}$.

10. $a+x+\frac{a^2+x^2}{a-x}$. » $\frac{2a^2}{a-x}$.

155. Problema. Transformar $5x$ em uma fracção com o denominador ab.

Solução. $5x$ transformado em uma fracção fica $\frac{5x}{1}$; multiplicando agora ambos os termos desta fracção por ab, temos $\frac{5abx}{ab}$.

Já sabemos que multiplicando-se ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero, não se altera o valor da fracção; logo $5x=\frac{5abx}{ab}$.

Operação

$$5x=\frac{5x}{1}$$

$$\frac{5x}{1}\times\frac{ab}{ab}=\frac{5abx}{ab}$$

Regra. *Transforma-se a quantidade inteira em uma fracção com o denominador 1, e multiplicam-se ambos os seus termos pelo denominador dado.*

1. Transformar $3ax$ em uma fracção que tenha o denominador b. Resp. $\frac{3abx}{b}$.

2. Transformar $3xy$ em uma fracção que tenha o denominador $2a$. Resp. $\frac{6axy}{2a}$.

3. Transformar $a+b$ em uma fracção que tenha o denominador $a-b$. Resp. $\frac{a^2-b^2}{a-b}$.

4. Transformar $2x^2y$ em uma fracção que tenha o denominador $3a^2-2b$. Resp. $\frac{6a^2x^2y-4bx^2y}{3a^2-2b}$.

Reduzir fracções a um denominador commum

156. Reduzir duas ou mais fracções a um denominador commum é dar a todos um denominador igual sem lhes alterar o valor. Esta reducção é baseada no seguinte principio já demonstrado no n.º **147**:

Multiplicando-se ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero, muda-se a fórma da fracção, mas não se lhe altera o valor.

157. Tomando as fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{x}{y}$, vemos que ellas teem denominadores differentes; multiplicando agora ambos os termos de $\frac{a}{b}$ por y, no que não lhe alteraremos o seu valor, teremos $\frac{ay}{by}$; multiplicando tambem ambos os termos de $\frac{x}{y}$ por b, teremos $\frac{bx}{by}$. Deste modo obteremos as duas fracções $\frac{ay}{by}$ e $\frac{bx}{by}$, do mesmo valor que as primeiras, e com denominadores iguaes.

Neste exemplo, vemos que o denominador commum deve ser multiplo dos denominadores dados, pois by é multiplo de b e de y.

Problema. Reduzir $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{x}{y}$ a um denominador commum.

Solução. O denominador commum dos denominadores b, d e y é $b\times d\times y=bdy$.

Multiplicando o numerador da primeira fracção pelos denominadores das outras, teremos ady que é o numerador correspondente á primeira fracção. Multiplicando o numerador da segunda fracção pelos denominadores das outras, teremos $c\times b\times y=bcy$ que é o numerador correspondente á segunda fracção. Multiplicando o numerador da terceira fracção pelos denominadores das outras, teremos $x\times b\times d=bdx$, que é o numerador correspondente á terceira fracção.

Operação

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{x}{y}.$$

$$\frac{ady}{bdy},\ \frac{bcy}{bdy},\ \frac{bdx}{bdy}.$$

Regra. *Multiplicam-se entre si os denominadores, e o producto será o denominador commum.*

Multiplica-se depois o numerador de cada fracção por todos os denominadores excepto o seu proprio, e o producto será o numerador correspondente a essa fracção.

Reduzir cada um dos seguintes grupos de fracções a um denominador commum:

1. $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{1}{2}$. Resp. $\frac{2ad}{2bd}$, $\frac{2bc}{2bd}$ e $\frac{bd}{2bd}$.

2. $\frac{x}{y}$ e $\frac{a+x}{c}$. » $\frac{cx}{cy}$ e $\frac{xy+ay}{cy}$.

3. $\frac{2}{3}$, $\frac{3a}{4}$ e $\frac{x+y}{b}$. » $\frac{8b}{12b}$, $\frac{9ab}{12b}$, $\frac{12x+12y}{12b}$.

4. $\frac{2x}{3y}$, $\frac{3x}{5z}$ e a. » $\frac{10xz}{15yz}$, $\frac{9xy}{15yz}$ e $\frac{15ayz}{15zy}$.

5. $\frac{a}{x}$, $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{z}$. » $\frac{ayz}{xyz}$, $\frac{x^2z}{xyz}$ e $\frac{xy^2}{xyz}$.

6. $\frac{a}{c}$, $\frac{x}{y}$ e $\frac{3}{4}$. Resp. ?
7. $\frac{c}{d}$, $\frac{b}{x}$ e $\frac{d}{4}$. » ?
8. $\frac{2a}{3b}$ e $\frac{x}{a+b}$. » ?
9. $\frac{xy}{z}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2a}{b}$. » ?

Achar o minimo denominador commum

158. Já sabemos achar um denominador commum, mas não sabemos ainda achar o menor de todos, isto é, **o minimo denominador commum** que tem a grande vantagem de deixar as fracções reduzidas a seus termos menores.

159. Quando todos os denominadores das fracções dadas são quantidades primas entre si, o minimo denominador commum de todas ellas é o seu producto continuado, como fizemos na secção n.° **157**. Assim, nas fracções $\frac{a}{b}$, $\frac{2}{x}$ e $\frac{c}{y}$, o minimo denominador commum é $b \times x \times y = bxy$. Mas, quando as fracções teem denominadores com factores communs, o producto continuado desses factores não é o seu minimo denominador commum. Assim, nas fracções $\frac{a}{xy}$, $\frac{b}{xz}$ e $\frac{c}{yz}$, o minimo denominador commum não é $xy \times xz \times yz = xxyyzz$ ou $x^2y^2z^2$, mas sim xyz; pois desde que o denominador commum de dois ou mais denominadores dados é um multiplo dessas quantidades, segue-se que o minimo denominador deve ser o seu minimo multiplo commum. (Vêde o n.° **132**.)

Problema. Reduzir $\frac{a}{xy}$, $\frac{b}{xz}$ e $\frac{c}{yz}$ ao minimo denominador commum.

Solução. Acha-se o minimo multiplo commum dos denominadores xy, xz e yz. (n. 132). O minimo multiplo commum é xyz que se escreve como denominador commum das tres fracções do seguinte modo:

$$\overline{xyz}, \overline{xyz}, \overline{xyz}.$$

Divide-se esse denominador commum pelo denominador da primeira fracção, e o quociente multiplica-se pelo seu numerador, e obtem-se $xyz \div xy = z$; então $z \times a = az$ que é numerador correspondente á primeira fracção. Os numeradores das outras fracções acham-se por um processo identico. Assim, $xyz \div xz = y$, então $y \times b = by$, numerador da 2ª fracção. $xyz \div yz = x$; então $x \times c = cx$, numerador da 3ª fracção.

Operação

$$\frac{a}{xy}, \frac{b}{xz}, \frac{c}{yz}.$$

$$\frac{az}{xyz}, \frac{by}{xyz}, \frac{cx}{xyz}.$$

Regra. *Acha-se o minimo multiplo commum dos denominadores, e escreve-se como denominador commum das fracções dadas.*

Divide-se este denominador commum pelo denominador de uma das fracções, e o quociente multiplicado pelo numerador será o seu numerador correspondente. O mesmo se faz com as outras fracções.

Reduzir as fracções de cada um dos seguintes grupos ao seu minimo denominador commum:

		Respostas
1.	$\frac{cd}{ab}$, $\frac{2x}{3a}$ e $\frac{xy}{ac}$.	$\frac{3c^2d}{3abc}$, $\frac{2bcx}{3abc}$ e $\frac{3bxy}{3abc}$.
2.	$\frac{a}{2}$, $\frac{b}{3}$, $\frac{c}{4}$ e $\frac{x}{y}$.	$\frac{6ay}{12y}$, $\frac{4by}{12y}$, $\frac{3cy}{12y}$ e $\frac{12x}{12y}$.
3.	$\frac{2a}{3bc}$, $\frac{3x}{cd}$ e $\frac{5y}{6bd}$.	$\frac{4ad}{6bcd}$, $\frac{18bx}{6bcd}$ e $\frac{5cy}{6bcd}$.
4.	$\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{x-y}{x+y}$ e $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.	$\frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$, $\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$ e $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.
5.	$\frac{a^2c}{ab}$, $\frac{2cd}{b^2c}$ e $\frac{x^2y}{4bc}$.	?
6.	$\frac{2a}{4b}$, $\frac{cd}{bc}$ e $\frac{x^2y}{bcx}$.	?
7.	$\frac{m+n}{3a^2}$, $\frac{m-n}{2ax^2}$ e $\frac{m^2}{4cx}$.	?
8.	$\frac{x}{ac}$, $\frac{m}{b^2c}$ e $\frac{y}{c^2d}$.	?

Addição de fracções

160. Quando duas ou mais fracções teem um denominador commum representam varios numeros de partes iguaes da mesma unidade, ou do mesmo todo; neste caso, para se achar a somma destas fracções, bastará addicionar os seus numeradores. Assim, $\frac{2}{7}$ mais $\frac{3}{7}$ são $\frac{5}{7}$; do mesmo modo, $\frac{2x}{y} + \frac{3x}{y} = \frac{5x}{y}$.

Problema. Qual é a somma de $\frac{7b}{m}$, $\frac{4b}{m}$, $\frac{8b}{m}$.

Solução. Como as tres fracções teem um denominador commum, addicionam-se os numeradores que são $7b + 4b + 8b = 19b$, e a somma $19b$ escreve-se sobre o denominador commum, e fica $\frac{19b}{m}$.

Operação

$$\frac{7b}{m} + \frac{4b}{m} + \frac{8b}{m} = \frac{19b}{m}$$

Regra. *Addicionam-se os numeradores, e a somma escreve-se sobre denominador commum.*

Problema. Qual é a somma de $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$ e $\frac{x}{6}$?

Solução. Como os denominadores são differentes, temos de reduzir primeiro as tres fracções a um denominador commum, e depois procederemos como no problema precedente. A somma é $\frac{11x}{12}$.

Operação

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=\frac{6x}{12}+\frac{3x}{12}+\frac{2x}{12}=?$$

$$\frac{6x+3x+2x}{12}=\frac{11x}{12}.$$

Regra. *Reduzem-se as fracções a um denominador commum, e depois escreve-se a somma dos numeradores sobre elle.*

Exercicios para sommar:

		Respostas
1.	$\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=?$	$\frac{4a}{2}=2a.$
2.	$\frac{3ac}{2x}+\frac{11ac}{2xy}+\frac{8ac}{2xy}+\frac{5ac}{2xy}=?$	$\frac{27ac}{2xy}.$
3.	$\frac{2b+c}{x}+\frac{3b-c}{x}=?$	$\frac{5b}{x}.$
4.	$\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{6}=?$	$a.$
5.	$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=?$	$\frac{6x+4y+3z}{12}.$
6.	$\frac{3x}{4}+\frac{4x}{5}+\frac{5x}{6}=?$	$\frac{143x}{60}=2x+\frac{23x}{60}.$
7.	$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=?$	$x.$
8.	$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=?$	$\frac{2a}{a^2-b^2}.$
9.	$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}=?$	?
10.	$\frac{5+x}{y}+\frac{3-ax}{ay}+\frac{b}{3a}=?$	?
11.	$2x+3x+\frac{3z}{5}+x+\frac{2z}{9}=?$	$6x+\frac{37z}{45}.$
12.	$3+\frac{2a}{x}+5+\frac{3a}{x}=?$	?

Subtracção de fracções

161. Quando duas fracções teem um denominador commum, opera-se a subtracção achando a differença entre os numeradores. Assim, de $\frac{3a}{c}$ subtrahindo $\frac{2a}{c}$, resta $\frac{a}{c}$.

Problema. De $\frac{a}{b}$ subtrahindo $\frac{c}{b}$ quanto resta?

Solução. Como as duas fracções teem um denominador commum, acha-se a differença entre a e c que é $a-c$, e escreve-se sobre b, e ficará $\frac{a-c}{b}$.

Operação

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}.$$

Problema. Subtrahir $\frac{3a}{2}$ de $\frac{7a}{3}$.

Solução. Reduzidas as fracções a um denominador commum, temos $\frac{14a}{6}-\frac{9a}{6}$ ou $\frac{14a-9a}{6}=\frac{5a}{6}$.

Operação

$$\frac{7a}{3}-\frac{3a}{2}=?$$

$$\frac{14a-9a}{6}=\frac{5a}{6}$$

Regra. *Reduzem-se as fracções a um denominador commum, e subtrahe-se o numerador do subtrahendo do numerador do minuendo, e a differença escreve-se sobre o denominador commum.*

Exercicios para resolver:

1.	De $\frac{5y}{8}$ subtrahir $\frac{3y}{8}$.	Resp.	$\frac{2y}{8}=\frac{y}{4}.$
2.	De $\frac{a}{2}$ subtrahir $\frac{a}{3}$.	»	$\frac{a}{6}.$
3.	De $\frac{3x}{4}$ subtrahir $\frac{2x}{3}$.	»	$\frac{x}{12}.$
4.	De $\frac{a+b}{2}$ subtrahir $\frac{a-b}{2}$.	»	$b.$
5.	De $\frac{2ax}{3}$ subtrahir $\frac{5ax}{3}$.	»	$-\frac{3ax}{3}.$
6.	De $\frac{3}{4a}$ subtrahir $\frac{5}{2x}$.	»	$\frac{3x-10a}{4ax}.$
7.	De $\frac{3a}{4x}$ subtrahir $\frac{4x}{3a}$.	»	$\frac{9a^2-16x^2}{12ax}.$
8.	De $\frac{x+y}{x-y}$ subtrahir $\frac{x-y}{x+y}$.	»	$\frac{4xy}{x^2-y^2}.$
9.	De $\frac{2a+b}{5c}$ subtrahir $\frac{3a-b}{7c}$.	»	?
10.	De $5x+\frac{x}{b}$ subtrahir $2x-\frac{x-b}{c}$.	»	?
11.	De $\frac{1}{a-b}$ subtrahir $\frac{1}{a+b}$.	»	?
12.	De $\frac{a+3d}{4}$ subtrahir $\frac{3a-2d}{3}$.	»	?

Multiplicação de fracções

162. No theorema primeiro e no quarto sobre fracções, ficou demonstrado que multiplicando-se o numerador ou dividindo-se o denominador de uma fracção por um numero inteiro, augmenta-se o valor da fracção tantas vezes quantas forem as unidades do multiplicador ou divisor. Daqui se conclue que podemos de dois modos multiplicar uma fracção por um numero inteiro.

1° Modo. Problema. Multiplicar $\frac{a}{b}$ por m.

Solução. Multiplicando-se o numerador a pela quantidade m; o producto é am que se escreve sobre o denominador b, e ficará $\frac{am}{b}$.

Operação

$$\frac{a}{b} \times m = \frac{am}{b}$$

2° Modo. Problema. Multiplicar $\frac{a}{bx}$ por x.

Solução. Divide-se o denominador bx por x, e a fracção ficará $\frac{a}{b}$. Este modo só é praticavel quando o denominador se divide exactamente pela quantidade inteira.

Operação

$$\frac{a}{bx \div x} = \frac{a}{b}$$

Regra. *Multiplica-se o numerador pela quantidade inteira, e o producto escreve-se sobre o denominador.* Ou

Divide-se o denominador pela quantidade inteira, quando é divisivel por ella.

Operar as seguintes multiplicações:

		Respostas
1.	Multiplicar $\frac{2a}{bc}$ por ad.	$\frac{2a^2d}{bc}$.
2.	Multiplicar $\frac{ab}{24}$ por 6.	$\frac{ab}{4}$.
3.	Multiplicar $\frac{ab}{cd}$ por d.	$\frac{ab}{c}$.
4.	Multiplicar $\frac{a+b}{c}$ por xy.	$\frac{axy+bxy}{c}$.
5.	Multiplicar $\frac{b-c}{d}$ por $b+c$.	$\frac{b^2-c^2}{d}$.

		Respostas
6.	Multiplicar $\frac{3x^2}{10y}$ por $5y$.	$\frac{3x^2}{2}$.
7.	Multiplicar $\frac{4c}{2a+c}$ por $a-2b$.	$\frac{4ac-8bc}{2a+c}$.
8.	Multiplicar $\frac{b+c}{b-c}$ por $a+c$.	$\frac{ab+ac+bc+c^2}{b-c}$.
9.	Multiplicar $\frac{a-b}{c+d}$ por $c+d$.	$a-b$.
10.	Multiplicar $\frac{a}{c}$ por c.	a.
11.	Multiplicar $\frac{2a+3xz}{a^2b}$ por ab.	$\frac{2a+3xz}{a}$.
12.	Multiplicar $\frac{2x+3}{5}$ por $2ax$.	$\frac{4ax^2+6ax}{5}$.

163. Multiplicar uma fracção por outra.

Problema. Multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$.

Solução. Multiplicando entre si os numeradores, temos $a \times c = ac$; multiplicando os denominadores, temos $b \times d = bd$. O producto das duas fracções é $\frac{ac}{bd}$.

Operação

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Demonstração. Se multiplicarmos $\frac{a}{b}$, por c, o producto será $\frac{ac}{b}$; mas o multiplicador não é c, mas sim $\frac{c}{d}$ e por isso o producto $\frac{ac}{b}$ é d vezes maior do que deve ser. Multiplicando agora o denominador de $\frac{ac}{b}$ por d, diminuiremos d vezes o valor da fracção, e então o producto $\frac{ac}{bd}$ ficará no seu verdadeiro valor.

Regra. *Multiplicam-se entre si os numeradores, depois os denominadores, e os dois productos serão os termos da fracção resultante da multiplicação.*

Nota. Para se multiplicar uma fracção por uma quantidade mixta, reduz-se a quantidade mixta a uma fracção, e segue-se a regra acima. Se a fracção resultante for reduzivel, simplifica-se, para que o producto fique na sua expressão mais simples.

Operar as seguintes multiplicações:

		Respostas			Respostas
1.	$\frac{3a}{4} \times \frac{5x}{8} = ?$	$\frac{15ax}{32}$.	7.	$\frac{2x}{y} \times \frac{x}{2d} \times \frac{b}{y} = ?$	$\frac{bx^2}{dy^2}$.
2.	$\frac{4a}{5x} \times \frac{3x}{7a} = ?$	$\frac{12}{35}$.	8.	$\frac{a-b}{2} \times \frac{2}{a^2-b^2} = ?$	
3.	$\frac{2a}{3} \times \frac{4a}{5} = ?$	$\frac{8a^2}{15}$.	9.	$\frac{2x}{a} \times \frac{3ab}{c} \times \frac{3ac}{2b} = ?$	
4.	$\frac{3x^2}{10y} \times \frac{5y}{9x} = ?$	$\frac{x}{6}$.	10.	$\left(x+\frac{2xy}{x-y}\right)\left(x-\frac{2xy}{x+y}\right) = ?$	
5.	$\frac{3(a+x)}{2} \times \frac{4x}{a+x} = ?$	$6x$.	11.	$\frac{a}{a-b} \times \frac{b}{a+b} = ?$	
6.	$\frac{2x+3}{5} \times \frac{10x}{7} = ?$	$\frac{4x^2+6x}{7}$.	12.	$\left(b+\frac{bx}{a}\right)\frac{a}{x} = ?$	

164. Quando os numeradores e denominadores teem factores communs, cancellam-se esses factores antes da multiplicação, e deste modo, obtem-se um producto já simplificado.

Problema. Qual é o producto de $\frac{b}{x} \times \frac{y}{b} \times \frac{x}{2a}$?

Solução. Como o factor b é commum ao numerador da primeira fracção e ao denominador da segunda, cancella-se este factor nos dois logares, e o mesmo se faz com o factor x. O resultado da multiplicação é $\frac{y}{2a}$.

Operação

$$\frac{\not{b}}{\not{x}} \times \frac{y}{\not{b}} \times \frac{\not{x}}{2a} = \frac{y}{2a}.$$

Demonstração. Dividindo-se ambos os termos de uma fracção por uma mesma quantidade, não se altera o seu valor (n.º 147). Ora, a fracção é $\frac{b}{x} \times \frac{y}{b} \times \frac{x}{2a}$ ou $\frac{bxy}{2abx}$. Cancellando-se o factor b no numerador e denominador é o mesmo que dividir estes dois termos por b, e o mesmo succede com o factor x.

Problema. Multiplicar $\frac{9a}{15y}$ por $\frac{5b}{2a}$.

Solução. Decompondo-se os dois numeradores e os dois denominadores, e cancellando-se os factores communs 3, 5 e a, obtem-se logo o producto simplificado.

$$\frac{9a}{15y} \times \frac{5b}{2a} = \frac{\not{3} \times 3 \times \not{a} \times \not{5} \times b}{\not{3} \times \not{5} \times y \times 2 \times \not{a}} = \frac{3b}{2y}.$$

1. Operar $\frac{2a}{3} \times \frac{4a}{5} \times \frac{5}{2a} \times \frac{6}{x}$. Resp. $\frac{8a}{x}$.
2. Operar $\frac{a+b}{a-b} \times \frac{a-b}{a+b}$. » 1.
3. Operar $\frac{xyz}{x^4+y^4} \times \frac{x^4+y^4}{xyz}$. » ?
4. Operar $\frac{18x}{15y} \times \frac{3ab}{36x} \times \frac{2a}{c}$. » ?

Divisão de fracções

165. A divisão de uma fracção por um numero inteiro póde ser operada por duas fórmas: ou dividindo-se o numerador ou multiplicando-se o denominador, como já foi demonstrado nas secções **144** e **145**.

Vamos resolver quatro exemplos para o discipulo não achar difficuldade alguma nas operações.

Dividindo-se o numerador:

$$\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4 \div 2}{5} = \frac{2}{5} \qquad \frac{ay}{m} \div y = \frac{ay \div y}{m} = \frac{a}{m}$$

$$\frac{3a}{b} \div 3 = \frac{3a \div 3}{b} = \frac{a}{b} \qquad \frac{18ac}{by} \div 3a = \frac{18ac \div 3a}{by} = \frac{6c}{by}.$$

Os mesmos exemplos, multiplicando-se o denominador:

$$\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4}{5 \times 2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \qquad \frac{ay}{m} \div y = \frac{ay}{m \times y} = \frac{ay}{my} = \frac{a}{m}.$$

$$\frac{3a}{b} \div 3 = \frac{3a}{b \times 3} = \frac{\not{3}a}{\not{3}b} = \frac{a}{b} \qquad \frac{18ac}{by} \div 3a = \frac{18ac}{by \times 3a} = \frac{18ac}{3aby} = \frac{6c}{by}.$$

Regra. *Divide-se o numerador pelo divisor, e se não for divisivel, multiplica-se o denominador pelo divisor, e escreve-se o numerador sobre o resultado.*

1. Dividir $\frac{6a^2b}{7n}$ por $3ab$. Resp. $\frac{2a}{7n}$.
2. Dividir $\frac{15a^3c^2}{17bd}$ por $3a^2c$. » $\frac{5ac}{17bd}$.
3. Dividir $\frac{14ac^3m^2}{11xy}$ por $7acm^2$. » $\frac{2c^2}{11xy}$.
4. Dividir $\frac{35b^5d^2}{13ac^3}$ por $5b^3d$. » $\frac{7d}{13ac^3}$.

5. Dividir $\frac{a^2+ab}{3+2x}$ por a. Resp. $\frac{a+b}{3+2x}$.

6. Dividir $\frac{c^2+cd}{5}$ por $c+d$. » $\frac{c}{5}$.

7. Dividir $\frac{x^2+2xy+y^2}{c+d}$ por $x+y$. » $\frac{x+y}{c+d}$.

8. Dividir $\frac{2a}{3c}$ por b. » $\frac{2a}{3bc}$.

9. Dividir $\frac{3}{ab+cd}$ por bd. » $\frac{3}{ab^2d+bcd^2}$.

10. Dividir $\frac{3+5a}{a-b}$ por $a+b$. » $\frac{3+5a}{a^2-b^2}$.

11. Dividir $\frac{3a+5c}{2x+3y}$ por $2x-3y$. » $\frac{3a+5c}{4x^2-9y^2}$.

12. Dividir $\frac{b-c}{a^2+ab+b^2}$ por $a-b$. » $\frac{b-c}{a^3-b^3}$.

166. Na divisão de uma fracção por outra, ha dois casos a considerar, que são:

1° Quando as fracções teem um denominador commum.

2° Quando as fracções teem denominadores differentes.

1° Caso. Dividir $\frac{12a}{m}$ por $\frac{3a}{m}$.

Solução. Como as duas fracções teem um denominador commum, bastará só operar com os numeradores. Então $12a \div 3a = 4$, isto é, $12a$ contém 4 vezes $3a$, e por isso, $\frac{12a}{m}$ contém 4 vezes $\frac{3a}{m}$.

Operação

$$\frac{12a}{m} \div \frac{3a}{m} = 4$$

2° Caso. Dividir $\frac{a}{x}$ por $\frac{c}{y}$.

Solução. Desde que os denominadores são differentes, devemos reduzil-os a um denominador commum, e teremos $\frac{ay}{xy} \div \frac{cx}{xy}$. Agora, como as duas fracções teem um denominador commum, podemos fazer a operação só com os numeradores, como no caso acima, $ay \div cx = \frac{ay}{cx}$.

Operação

$$\frac{a}{x} \div \frac{c}{y} = ?$$

$$\frac{ay}{xy} \div \frac{cx}{xy} = \frac{ay}{cx}.$$

Examinando o quociente $\frac{ay}{cx}$, vemos que elle é composto de $\frac{a}{x} \times \frac{y}{c}$, isto é, o dividendo multiplicado pelo divisor, tendo este os termos invertidos. Daqui podemos formular uma só regra para os dois casos:

Regra. *Para se dividir uma fracção por outra, invertem-se os termos do divisor, e multiplicam-se as duas fracções.*

Nota. Se o dividendo ou o divisor for uma quantidade mixta, transforma-se em uma fracção (n.º 155), e procede-se como na regra acima.

Se o dividendo for uma quantidade inteira, além da regra já exposta (n.º 165), podemos tambem dar ao inteiro o denominador 1 como, $a = \frac{a}{1}$ e depois proceder como acima.

1. Dividir $\frac{a}{3}$ por $\frac{2a}{9}$. Resp. $1\frac{1}{2}$.

2. Dividir $\frac{3a}{5}$ por $\frac{4a}{7}$. » $\frac{21}{20}$.

3. Dividir $\frac{a^2b}{cd}$ por $\frac{ab}{d}$. » $\frac{a}{c}$.

4. Dividir $\frac{x^2}{3a}$ por $\frac{xy^2}{2b}$. » $\frac{2bx}{3ay^2}$.

5. Dividir 4 por $\frac{a}{3}$. » $\frac{12}{a}$.

6. Dividir 4 por $\frac{3}{a}$. » $\frac{4a}{3}$.

7. Dividir ab^2 por $\frac{2ab}{5c}$. » $\frac{5bc}{2}$.

8. Dividir $\frac{6ax}{3}$ por $\frac{4x}{3}$. » $\frac{3a}{2}$.

9. Dividir $\frac{3a^2x}{7}$ por $\frac{3ax^2}{14}$. » $\frac{2a}{x}$.

10. Dividir $\frac{16ax}{5}$ por $\frac{4x}{15}$. » $12a$.

11. Dividir $\frac{6x+4}{5}$ por $\frac{3x+2}{4y}$. » $\frac{8y}{5}$.

12. Dividir $\frac{x^2-4}{6}$ por $\frac{x-2}{2}$. » $\frac{x+2}{3}$.

13. Dividir $\frac{x^2-2xy+y^2}{ab}$ por $\frac{x-y}{bc}$. » $\frac{cx-cy}{a}$.

14. Dividir $\frac{a^2-b^2}{4}$ por $\frac{a+b}{8}$. » ?

15. Dividir $5a^2-\frac{1}{5}$ por $a+\frac{1}{5}$. » ?

16. Dividir $\frac{7a^2-5a}{3}$ por $\frac{a^2}{3}$. » ?

EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

167. Equação é uma igualdade entre duas quantidades algebricas. Assim, $x-5=3$ é uma equação que mostra que, se 5 for subtrahido de x, o resultado será 3.

168. Cada equação é composta de duas partes unidas pelo signal $=$; a parte que está á esquerda deste signal, chama-se **primeiro membro**; e a que está á direita, chama-se **segundo membro**. Exemplo:

(1º Membro) (2º Membro)

$$5x+3x-y = a+12$$

Cada membro de uma equação póde ter um ou mais termos precedidos pelos signaes $+$ ou $-$; assim, na equação acima, o primeiro membro tem tres termos, e o segundo tem dois.

169. Em uma equação ha geralmente quantidades conhecidas e quantidades desconhecidas. As quantidades conhecidas são representadas por numeros ou pelas primeiras lettras do alphabeto, a, b, c, etc.; e as quantidades desconhecidas são representadas pelas ultimas lettras x, y e z.

170. As equações podem ser numeraes ou litteraes.

Equação numeral é aquella que tem as quantidades conhecidas representadas por numeros, como $5x+2x=21$.

Equação litteral é aquella que tem as quantidades conhecidas representadas por lettras ou por lettras e numeros, como $x+y=a-b$, $2x+ax=2a+14$.

171. Equação identica é a que tem ambos os membros com a mesma fórma, ou que podem ser reduzidos á mesma fórma; assim, $2x-1=2x-1$ e $5x+3x=8x$ são equações identicas, e teem tambem o nome de identidades.

172. As equações distinguem-se pelos seus diversos graus.

Equação do 1° grau é a que contém uma só quantidade desconhecida na sua primeira potencia, isto é, com o expoente 1 subentendido, pois x ou x^1 exprime a primeira potencia da quantidade x. Assim, $2x+5=9$ é uma equação do primeiro grau ou equação simples.

Equação do 2° grau é a que contém uma quantidade desconhecida na segunda potencia, isto é, com expoente 2. Assim $4x^2-7=29$ é uma equação do 2° grau.

173. Quando uma equação contém mais de uma quantidade

desconhecida, o seu grau é igual á maior somma dos expoentes das quantidades desconhecidas em qualquer termo.

174. Conhece-se o grau de uma equação pelo maior expoente da incognita, quando ha uma só, ou pela maior somma dos expoentes das incognitas em qualquer termo, quando ha mais de uma.

Agora trataremos sómente das equações do 1° grau, depois exporemos as outras circumstanciadamente.

175. Ha seis proposições que precisamos conhecer para mais facilmente comprehendermos as transformações que, muitas vezes, é necessario operar em uma equação.

Estas proposições, por serem evidentes e não precisarem de demonstração, chamam-se tambem **axiomas**:

1ª *Se a duas quantidades iguaes, a mesma quantidade for addicionada, as duas sommas serão iguaes.*

2ª *Se de duas quantidades iguaes, a mesma quantidade for subtrahida, os dois restos serão iguaes.*

3ª *Se duas quantidades iguaes forem multiplicadas pelo mesmo factor, os dois productos serão iguaes.*

4ª *Se duas quantidades iguaes forem divididas pelo mesmo divisor, os dois quocientes serão iguaes.*

5ª *Se duas quantidades iguaes forem elevadas á mesma potencia, os dois resultados serão iguaes.*

6ª *Se a mesma raiz for extrahida de duas quantidades iguaes, os dois resultados serão iguaes.*

176. Estas seis proposições ou axiomas podem ser reduzidas a uma só, a saber: *Se fizermos a mesma operação em duas quantidades iguaes, os resultados serão iguaes.* Daqui podemos deprehender que, se um membro de uma equação passar por alguma modificação, e o outro membro passar por uma modificação identica, os dois membros continuarão em igualdade.

177. Verificar uma equação é reconhecer a igualdade entre seus membros.

Se quizermos verificar uma equação, substituiremos as quantidades desconhecidas pelos seus valores numericos, e, se o resultado nos dois membros for igual, a equação estará verificada. Assim, na equação $2x+2a=3x+3$, substituindo a lettra x por 5, e a lettra a por 4, teremos

$$\begin{aligned}(2\times5)+(2\times4)&=(3\times5)+3\\ 10 + 8 &= 15 + 3\\ 18 &= 18\end{aligned}$$

Esta verificação póde ser effectuada, depois de termos achado o valor das quantidades desconhecidas.

Transformação das equações

178. Transformar uma equação é mudar a sua fórma sem alterar a igualdade entre os seus membros.

179. Resolver uma equação é achar o valor da quantidade desconhecida; este valor chama-se tambem **raiz da equação.**

180. As transformações que constantemente precisamos effectuar para resolver uma equação, são as seguintes:

1ª Inteirar a equação, isto é, transformar todos os termos fraccionarios da equação em quantidades inteiras.

2ª Transpôr os termos de um membro para o outro sem destruir a igualdade.

3ª Reduzir todos os termos semelhantes a um só termo.

Inteirar uma equação

181. Quando um ou mais termos de uma equação são fracções, torna-se preciso transformal-os em numeros inteiros para que a equação fique inteirada, isto é, composta só de numeros inteiros.

Problema. Inteirar a seguinte equação: $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$.

Solução. O minimo multiplo commum dos denominadores 2 e 3 é 6, porque $2\times3=6$. Multiplicando por 6 todos os termos da equação, temos $\frac{6x}{2}+\frac{6x}{3}=30$.

Com esta multiplicação não transtornamos a igualdade da equação, porque, se o primeiro membro ficou 6 vezes maior, o segundo teve igual augmento, e por isso continuam ambos em igualdade. (Axioma 3º).

Agora as fracções $\frac{6x}{2}$ e $\frac{6x}{3}$ podem ser transformadas em quantidades inteiras dividindo os numeradores pelos seus respectivos denominadores (n.º 152), e ficarão $3x$ e $2x$, e a equação inteirada será $3x+2x=30$.

Operação

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$$

$$\frac{6x}{2}+\frac{6x}{3}=30$$

$$3x+2x=30$$

Problema. Inteirar a equação $\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}=d$.

Solução. O minimo multiplo commum dos denominadores ab e bc é abc (n.º 132); multiplicando por abc todos os termos da equação, temos $\frac{abcx}{ab}+\frac{abcx}{bc}=abcd$.

Transformando agora as duas fracções em quantidades inteiras, temos cx e ax, e a equação inteirada será $cx+ax=abcd$.

Operação

$$\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}=d$$

$$\frac{abcx}{ab}+\frac{abcx}{bc}=abcd$$

$$cx+ax=abcd$$

Regra. *Para se inteirar uma equação, acha-se o minimo multiplo commum de todos os denominadores; multiplica-se por elle cada termo da equação, e depois transformam-se as fracções em quantidades inteiras.*

Inteirar as seguintes equações:

		Respostas
1.	$\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=2.$	$4x-3x=24.$
2.	$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=1.$	$20x+15x+12x=60.$
3.	$\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{x}{6}=\frac{5}{12}.$	$6x+3x-4x=10.$
4.	$\frac{x}{3}-\frac{x}{5}+\frac{x}{10}=\frac{7}{10}.$	$10x-6x+3x=21.$
5.	$\frac{x}{2}-4=\frac{x}{3}+6.$	$3x-24=2x+36.$
6.	$\frac{5x}{8}-\frac{5}{6}=\frac{3}{4}+\frac{7x}{12}.$	$15x-20=18+14x.$
7.	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+f=g.$	$ad-bc+bdf=bdg.$
8.	$\frac{2x+8}{2}-4=\frac{x-4}{12}+57.$	?
9.	$\frac{2x-3}{4}+\frac{x}{7}=\frac{x-3}{2}+\frac{5}{14}.$	?
10.	$\frac{x}{a+b}+\frac{x}{a-b}=\frac{c}{a^2-b^2}.$	$ax-bx+ax+bx=c.$

Transpôr os termos de uma equação

182. Quando ambos os membros de uma equação conteem quantidades conhecidas e desconhecidas, transpõem-se as quantidades desconhecidas para o primeiro membro, e as conhecidas para o segundo.

Problema. Transpôr os termos da equação $6x-5=7+3x$.

Solução. Nesta equação temos de transpôr $3x$ para o primeiro membro, e 5 para o segundo.

Tirando $3x$ do segundo membro, elle ficará com menos $3x$; mas para conservar a igualdade, passa-se $3x$ com o signal — para o primeiro membro, e assim os dois membros ficarão com menos $3x$, e conservarão a igualdade.

Operação

$$6x-5=7+3x$$

$$6x-3x=7+5$$

Tirando -5 do primeiro membro, elle augmentará 5 unidades, porque -5 quer dizer menos 5; ora, para conservarmos a igualdade, passaremos 5 para o outro membro com o signal +, e assim os dois membros terão 5 unidades de mais, o que não transtornará a igualdade. E a equação transposta será $6x+3x=7+5$.

Regra. *Em uma equação podemos transpôr qualquer termo de um membro para o outro, mudando-lhe o signal.*

Nas seguintes equações, o discipulo transporá os termos conhecidos para o primeiro membro, e os desconhecidos, para o segundo:

1. $3x+6-8=2x+3.$ Resp. $3x-2x=3+8-6.$
2. $ax+b=d-cx.$ » $ax+cx=d-b.$
3. $4x-6=2x+4.$ » $4x-2x=4+6.$
4. $9x+c=cx+d.$ » $9x-cx=d-c.$
5. $ax+d=dx+b.$ » $ax-dx=b-d.$

Reducção de termos semelhantes

183. Depois de transpormos os termos de uma equação, precisamos reduzir em cada membro todos os termos semelhantes a um só termo para acharmos o valor da incognita.

1° Problema. Qual o valor de x na equação $3x+2x=15+10$?

Solução. Os dois termos do primeiro membro podem ser reduzidos a um só, porque $3x+2x=5x$.
Tambem os dois termos do segundo membro podem ser reduzidos a um só, pois $15+10=25$. A equação reduzida é $5x=25$, e o valor de x é $25\div5=5$.

Operação

$$3x+2x=15+10$$
$$5x=25$$
$$x=5$$

2° Problema. Achar o valor de x na equação $3x+x=18+3$?

Solução. Reduzindo ambos os membros, temos $4x=21$; ora, o valor de x é 21 dividido por 4, isto é, $\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$.

Operação

$$3x+x=18+3$$
$$4x=21$$
$$x=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$$

184. Para resolvermos uma equação litteral, temos de fazer ás vezes alguma combinação com a multiplicação ou com a divisão. Assim, na equação $ax=b$, se dividirmos ambos os termos por a, teremos $\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$; reduzindo agora $\frac{ax}{a}$ a uma quantidade inteira, temos a equação $x=\frac{b}{a}$.

3° Problema. Qual o valor de x na equação $ax-bx+cx=d$?

Solução. O primeiro membro sendo decomposto para se tirar o factor x, ficará $x(a-b+c)$. (Vêde n.° 118). Dividindo agora ambos os termos por $a-b+c$, e depois reduzindo o primeiro membro a uma quantidade inteira, teremos $x=\frac{d}{a-b+c}$.

Operação

$$ax-bx+cx=d$$
$$x(a-b+c)=d$$
$$\frac{x(a-b+c)}{a-b+c}=\frac{d}{a-b+c}.$$
$$x=\frac{d}{a-b+c}.$$

Nota. Nesta solução, dividimos ambos os membros por $a-b+c$ para tornar mais intelligivel ao alumno a decomposição do primeiro membro; mas esta divisão é desnecessaria, desde que elle comprehenda que, se $ax=b$, então $x=\frac{b}{a}$; do mesmo modo, se $x(a-b+c)=d$, então $x=\frac{d}{a-c+d}$.

185. Para formularmos a regra completa para a solução das equações, vamos resolver o seguinte problema:

4° Problema. Qual é o valor de x na equação $\frac{3x}{2}-4=6+\frac{x}{4}$?

Solução. Equação dada é.............. $\frac{3x}{2}-4=6+\frac{x}{4}$,

inteirando a equação.................... $6x-16=24+x$,
transpondo os termos.................... $6x-x=24+16$,
reduzindo os termos..................... $5x=40$,
dividindo ambos os membros por 5........ $x=8$.

Regra geral para a solução

I. *Inteiram-se todos os termos fraccionarios da equação.*

II. *Transpõem-se as quantidades conhecidas para o segundo membro, e as desconhecidas para o primeiro.*

III. *Reduz-se cada membro da equação á sua fórma mais simples, e depois dividem-se ambos os membros pelo coefficiente da quantidade desconhecida.*

Achar o valor da quantidade desconhecida nas seguintes equações:

1. $3x-5=2x+7.$ Resp. $x=12.$
2. $3x-8=16-5x.$ » $x=3.$
3. $5x-7=3x+15.$ » $x=11.$
4. $3x-25=-x-9.$ » $x=4.$
5. $15-2x=6x-25.$ » $x=5.$
6. $5(x+1)+6(x+2)=9(x+3).$ » $x=5.$
7. $4(5x-3)-64(3-x)-3(12x-4)=96.$ » $x=6.$
8. $10(x+5)+8(x+4)=5(x+13)+121.$ » $x=8.$
9. $\frac{x}{2}-2=5-\frac{x}{5}.$ » $x=10.$
10. $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}+7=\frac{x}{8}-\frac{x}{6}+\frac{21}{2}.$ » $x=12.$
11. $x+\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}=18.$ » $x=8.$
12. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=14.$ » $x=24.$
13. $\frac{3x}{4}+\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}=2\frac{1}{2}.$ » $x=2.$
14. $\frac{x-2}{4}-2=1-\frac{x+7}{3}.$ » $x=2.$

15. $\frac{3x+1}{2}-\frac{2x}{3}=10+\frac{x-1}{6}$. Resp. $x=14$.

16. $\frac{x+2}{3}-\frac{x-3}{4}=x-2-\frac{x-1}{2}$. » $x=7$.

17. $\frac{3x-2}{4}-\frac{4-x}{2}=2x-\frac{7x-2}{3}$. » $x-2$.

18. $\frac{4}{5}x-\frac{5}{4}x+18=\frac{1}{9}(4x+1)$. » $x=20$.

19. $\frac{5x}{x+4}=1$. » $x=1$.

20. $2x-\frac{x-2}{10}=x+\frac{x+18}{15}$. » $x=1\frac{1}{5}$.

21. $4x-b=2x-d$. » $x=\frac{b-d}{2}$.

22. $ax+b=cx+d$. » $x=\frac{d-b}{a-c}$.

23. $ax-bx=d-cx$. » $x=\frac{d}{a+c-b}$.

24. $ax-bx=c+dx-m$. » $x=\frac{c-m}{a-b-d}$.

25. $7+9a-5x=6x+5ax$. » $x=\frac{9a+7}{5a+11}$.

26. $b(a-bx)+c(ax-c)=bc$. » $x=\frac{bc-ab+c^2}{ac-b^2}$.

27. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$. » $x=\frac{abc}{a+b}$.

28. $\frac{ab}{x}=bc+\frac{1}{x}$. » $x=\frac{ab-1}{bc}$.

29. $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}=1$. » $x=a+b+c$.

30. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=d$. » $x=\frac{abcd}{ab+ac+bc}$.

31. $\frac{a}{x}+\frac{b}{c}-\frac{d}{m}=0$. » $x=\frac{acm}{cd-bm}$.

32. $\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{b}{a}$. » $x=\frac{a^2}{a-b}$.

33. $\frac{ax}{2}+\frac{bx}{3}=c$. » $x=?$

34. $\frac{3x}{2}+\frac{2a}{3}=\frac{4b}{5}+\frac{15c}{3}$. » $x=?$

35. $x+2=3x+\frac{x-8}{4}-\frac{x+6}{3}$. » $x=?$

36. $x-20=-\frac{2x+1}{5}$. Resp. $x=?$

37. $\frac{3a+x}{x}-5=\frac{6}{x}$. » $x=?$

38. $2x+\frac{ax-b}{3}=x-a$. » $x=?$

39. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}-\frac{x}{c}=m$. » $x=?$

PROBLEMAS

186. Problema algebrico é uma questão para resolver, na qual se dá uma ou mais quantidades conhecidas chamadas **dados**, e se requer uma ou mais quantidades desconhecidas chamadas **incognitas**.

187. Resolver um problema é determinar as quantidades desconhecidas, por meio de operações feitas com as quantidades conhecidas.

188. A solução algebrica de um problema consta de duas partes que são:

A primeira é a formação da equação que consiste em exprimir em linguagem algebrica a relação que ha entre as quantidades desconhecidas e os dados do problema.

A segunda é a solução da equação, isto é, achar o valor da incognita.

189. A primeira parte é geralmente a mais difficil. Não é possivel formular uma regra precisa e clara que habilite o discipulo a traduzir promptamente o enunciado de um problema, em uma equação algebrica; o proprio discipulo com o seu raciocinio é quem tem de formar a equação, segundo a natureza dos dados offerecidos para o calculo.

Nota. Ha problemas de facil intuição, e que podem ser resolvidos sem difficuldade alguma; ha outros, porém, que só a custa de um esforço do raciocinio é que os discipulos poderão achar um meio de os dispor em uma equação algebrica. Isto, porém, de modo algum deve desanimar os alumnos estudiosos, porque com alguma applicação e perseverança, elles poderão vencer as maiores difficuldades.

Se na primeira tentativa o discipulo não puder formar a equação do problema, empregue novo esforço; repita as tentativas até ficar senhor do achado. Todo o esforço e fadiga que der ao raciocinio para resolver um problema, não será trabalho

inutil ou perdido, porque lhe resultará em dois grandes proveitos: o primeiro é adestrar-se em resolver facilmente os problemas da Algebra, o que é já uma boa recompensa; o segundo é desenvolver as faculdades intellectuaes, pois sendo ellas manejadas constantemente no raciocinio exacto e claro das soluções algebricas, poderão tambem raciocinar e resolver com acerto questões de outra natureza.

A segunda parte da solução dos problemas, isto é, a determinação dos seus elementos desconhecidos, já ficou perfeitamente explicada, de modo a poderem os discipulos resolver com promptidão qualquer caso.

190. A primeira cousa que o discipulo tem de fazer para resolver um problema, é comprehender perfeitamente o enunciado, isto é, conhecer a natureza e todas as condições da questão para poder exprimil-as em linguagem algebrica numa equação. A direcção geral para este processo é a seguinte:

Regra. *Representam-se as incognitas com as ultimas lettras do alphabeto.*

Exprime-se em linguagem algebrica a relação que ha entre as quantidades conhecidas e as incognitas, de sorte que a equação formada satisfaça as condições do problema.

Resolve-se depois a equação.

191. Vamos agora resolver alguns problemas para mostrar aos discipulos o modo por que devem dirigir o seu raciocinio nestes processos algebricos.

I Problema. A somma de dois numeros é 186, e o maior é o dobro do menor; quaes são os numeros?

Solução. Seja x o numero menor, e $2x$ o numero maior. Como os dois numeros sommam 186, a equação será $x+2x=186$. Resolvida a equação, vemos que x, numero menor, é 62, e $2x$ que é o numero maior, é 124.

Verificação. O resultado da solução é verdadeiro, quando satisfaz todas as condições do problema. Ora neste problema ha duas condições: a primeira é que os dois numeros sommam 186; e a segunda é que o maior é o dobro do menor. Os numeros 62 e 124 satisfazem estas condições, porque sommam $62+124=186$, e 124 é o dobro de 62.

Equação

$$x+2x=186$$
$$3x=186$$
$$x=62$$
$$2x=124.$$

II Problema. Um pai disse a seu filho: « A differença das nossas idades é 48 annos, e eu tenho cinco vezes a tua idade ». Quaes eram as duas idades?

Solução. Seja x a idade do filho; então a idade do pai será $5x$. Como a differença das duas idades é 48 annos, a equação será $5x-x=48$. Resolvida a equação, x é igual a 12; logo, a idade do filho é 12 annos, e a do pai é 5 vezes maior, isto é, $5\times 12=60$ annos.

Verificação. $60-12=48$.

Equação

$$5x-x=48$$
$$4x=48$$
$$x=12$$
$$5x=60.$$

III Problema. Qual é o numero que, juntando-se-lhe um terço de si mesmo, ficará 24?

Solução. Seja x o numero; então um terço de x é $\frac{x}{3}$.

A equação será $x+\frac{x}{3}=24$.

Inteirada a equação, temos $3x+x=72$. Resolvida a equação, x é igual a 18; logo, o numero é 18.

Verificação. $18+\frac{18}{3}=24$.

Equação

$$x+\frac{x}{3}=24$$
$$3x+x=72$$
$$4x=72$$
$$x=18.$$

IV Problema. Qual é o numero que, juntando-se-lhe metade de si mesmo, e do resultado subtrahindo-se dois terços do mesmo numero, restará 105?

Solução. Seja x o numero; então a metade desse numero é $\frac{x}{2}$, e dois terços são $\frac{2x}{3}$.

A equação será $x+\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}=105$.

Resolvida a equação, o valor de x é 126.

Verificação. $126+63-84=105$.

Equação

$$x+\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}=105$$
$$6x+3x-4x=630$$
$$5x=630$$
$$x=126.$$

V Problema. Dividir uma linha de 25 centimetros de comprimento em duas partes, de sorte que a maior tenha 3 centimetros mais do que a menor.

Solução. Seja x a parte menor, e $x+3$ a maior; então a equação será $x+x+3=25$. O valor de x é 11 que é a parte menor; a maior é $x+3=14$.

Verificação. $11+14=25$.

Equação

$$x+x+3=25$$
$$2x=25-3$$
$$2x=22$$
$$x=11$$
$$x+3=14.$$

VI Problema. Dividir 68\$ entre A, B e C, de sorte que B receba 5\$ mais do que A, e C receba 7\$000 mais do que B.

Solução. Seja x a parte de A; então a parte de B será $x+5\$$, e a parte de C será $x+5\$+7\$$, isto é, $x+12\$$.

A equação será $x+x+5\$+x+12\$=68\$$.

O valor de x é 17\$; então a parte de A é 17\$; a parte de B é 22\$, e a parte de C é 29\$.

Verificação. $17\$+22\$+29\$=68\$$.

Equação

$$x+x+5\$+x+12\$=68\$$$
$$3x=51\$$$
$$x=17\$$$
$$x+5\$=22\$$$
$$x+12\$=29\$.$$

VII Problema. Qual é o numero que sendo addicionado com a sua terça parte, a somma será igual á sua metade e mais 10?

Solução. Seja x igual ao numero; então o numero com a sua terça parte é $x+\frac{x}{3}$; e a metade do numero com mais 10 é $\frac{x}{2}+10$.

A equação será $x+\frac{x}{3}=\frac{x}{2}+10$.

Resolvida a equação, achamos que o valor de x é 12.

Verificação. $12+4=6+10$.

Equação

$$x+\frac{x}{3}=\frac{x}{2}+10$$
$$6x+2x=3x+60$$
$$6x+2x-3x=60$$
$$5x=60$$
$$x=12.$$

VIII Problema. Um tanque tinha agua até a terça parte da sua altura; mas, lançando-se dentro delle 17 barris de agua, ficou cheia a metade do tanque; quantos barris levava o tanque?

Solução. Seja x igual ao numero de barris que leva o tanque. Visto que um terço do numero mais 17 é igual á metade do numero, então a equação será $\frac{x}{3}+17=\frac{x}{2}$.

O valor de x é 102, que é o numero de barris que leva o tanque.

Como os dois termos teem o signal menos, trocam-se os signaes nos dois termos, e assim ficarão com o signal mais.

Verificação. $\frac{102}{3}+17=\frac{102}{2}$.

Equação

$$\frac{x}{3}+17=\frac{x}{2}$$
$$2x+102=3x$$
$$2x-3x=-102$$
$$-x=-102$$
$$x=\ 102.$$

IX Problema. A somma de dois numeros é 67, e a sua differença é 19; quaes são os dois numeros?

Solução. Seja x o numero menor, e $x+19$ o numero maior.

A equação será $x+x+19=67$.

O valor de x é 24; logo, o numero menor é 24, e o maior é $x+19=43$.

Verificação. $24+43=67$.

Outra solução. Seja x o numero maior, e $x-19$ o numero menor.

Então, a equação será $x+x-19=67$.

O numero maior que é x, é 43; e o numero menor que é $x-19$, é 24.

Equação

$$x+x+19=67$$
$$2x=67-19$$
$$2x=48$$
$$x=24$$
$$x+19=43.$$

$$x+x-19=67$$
$$2x=67+19$$
$$2x=86$$
$$x=43$$
$$x-19=24.$$

X Problema. Um fazendeiro contractou um empregado por 30 dias, dando-lhe 25 tostões e comida em cada dia que trabalhasse, e cobrando-lhe 20 tostões pela comida em cada dia que vadiasse. No fim do tempo, o empregado recebeu 300 tostões; quantos dias trabalhou elle, e quantos dias vadiou?

Solução. Seja $x=$ ao numero de dias que trabalhou,

$30-x=$ ao numero de dias que vadiou.

$25x=$ salario dos dias de trabalho.

$20(30-x)=$ importe da comida nos dias que não trabalhou.

Deduzindo do salario que ganhou, o importe da comida dos dias que vadiou, restam 300 tostões; então a equação será

$25x-20(30-x)=300$.

Sendo x igual a 20, os dias que trabalhou, foram 20, e os que vadiou foram $30-20=10$.

Equação

$$25x-20(30-x)=300$$
$$25x-600+20x=300$$
$$45x=300+600$$
$$45x=900$$
$$x=20$$
$$30-x=10.$$

Verificação. 20 dias a 25 tostões....... 500 tostões
Deduzindo 10 » a 20 » .... 200 »
Restam. 300 »

Nota. Damos o dinheiro em tostões, para facilitar a solução; o discipulo agora poderá substituir 25 tostões por 2$500, e 30 tostões por 3$000, etc.

XI Problema. Duas locomotivas partiram ao mesmo tempo dos extremos de uma linha ferrea de 210 kilometros de extensão; uma movia-se com a velocidade de 40 kilometros por hora, e a outra com a velocidade de 30. Quantas horas gastaram para se encontrar?

Solução. Seja x o numero das horas; ora como uma locomotiva anda 40 kilometros por hora, em x horas andará $40x$. A outra locomotiva, por semelhante razão, andará $30x$. Como a linha tem 210 kilometros, a equação é $40x+30x=210$. Resolvida a equação, achamos que o valor de x é 3, numero de horas precisas para o encontro.

Equação

$$40x+30x=210$$
$$70x=210$$
$$x=3.$$

Se o problema, além de pedir o numero de horas, pedisse tambem o ponto do encontro, a solução seria muito facil, porque sabendo-se que as locomotivas gastaram 3 horas para se encontrar, concluia-se daqui que

a mais veloz andou $40\times3=120$ kilometros;
a outra andou $30\times3=\ 90$ kilometros.

Isto quer dizer que as locomotivas se deviam encontrar no ponto da linha, que dista 120 kilometros de um extremo, e 90 do outro.

XII Problema. De uma estação sahiu um trem mixto correndo 20 milhas por hora; 3 horas depois, sahiu o trem expresso na mesma direcção, andando 25 milhas por hora. Em quantas horas este alcançou aquelle?

Solução. Quando o segundo trem partiu, já o primeiro lhe levava uma dianteira de $20\times3=60$ milhas. Seja pois x o numero de horas; como o expresso anda 25 milhas por hora, em x horas andará $25x$; e por semelhante razão, o mixto andará $20x$. Ora, o expresso para alcançar o mixto, tem de andar o que o mixto anda, e ainda mais as 60 milhas que o separam delle. Logo, a equação deve ser $25x=20x+60$. Resolvida a equação, vemos que o numero de horas requerido é 12.

Equação

$$25x=20x+60$$
$$25x-20x=60$$
$$5x=60$$
$$x=12$$

Verificação. O expresso andou $25\times12=300$ milhas;
o mixto andou $20\times15=300$ milhas.

Outra solução do mesmo problema. Seja x o numero de horas que andou o expresso; e $x+3$ o numero de horas que andou o mixto. Ora como ambos correm uma distancia igual, segue-se que o numero de horas multiplicado pela distancia que cada um anda em cada hora, dará productos iguaes, e por isso

$$25 \times x = 20 \times (x+3).$$

Equação

$$25 \times x = 20(x+3)$$
$$25x = 20x + 60$$
$$5x = 60$$
$$x = 12.$$

O discipulo poderá agora resolver sem difficuldade os seguintes problemas:

13. Dividir 42 amendoas entre Julio e José, de sorte que José receba o dobro das de Julio. Resp. Julio 14, José 28.

14. Dividir o numero 48 em tres partes, de sorte que a segunda parte seja o dobro da primeira, e a terceira tres vezes tanto como a primeira. Resp. 8, 16, e 24.

15. Dividir o numero 60 em tres partes, de sorte que a segunda parte tenha tres vezes a primeira, e a terceira seja o dobro da segunda. Resp. 6, 18 e 36.

16. Um meio, um terço e um quarto de certo numero sommam 65. Qual é o numero? Resp. ?

17. Dividir 88 libras esterlinas entre A, B e C, dando a B $\frac{2}{3}$, e a C $\frac{3}{7}$ da parte de A. Resp. A=42, B=28 e C=18.

18. Dividir o numero 32 em duas partes, de sorte que a maior tenha mais 6 do que a menor. Resp. 13 e 19.

19. O numero inteiro de empregados de uma fabrica é 1000 pessoas; o numero de meninos é o dobro do numero de homens, e o numero de mulheres é 11 vezes o numero de meninos. Achar o numero de homens, de meninos e de mulheres.
Resp. Homens 40, meninos 80, mulheres 880.

20. Um negociante comprou quantidades iguaes de farinha de duas sortes, uma a 8$ cada sacca, e a outra a 10$; importando a farinha em 198$, quantas saccas comprou? Resp. 22.

21. Do triplo de certo numero subtrahindo 17, resta 22; achar o numero. Resp. ?

22. Duas pessoas estando separadas pela distancia de 4200 kilometros, tomaram ás mesmas horas os trens expressos para onde se tinham de encontrar, andando uma 40 kilometros por hora, e a outra 30. Quantas horas gastaram para se encontrar? Resp. 60.

23. Dividir uma linha de 28 centimetros em duas partes, de sorte que uma tenha $\frac{3}{4}$ da outra. Resp. 12 e 16.

24. A somma de dois numeros é 200, e a sua differença é 50; quaes são os numeros? Resp. 125 e 75.

25. A somma de dois numeros é 100, e a sua differença é 76; quaes são os numeros? Resp. ?

26. A somma de dois numeros é $5\frac{1}{2}$, e a sua differença $\frac{3}{4}$; quaes são os numeros? Resp. $3\frac{1}{8}$ e $2\frac{3}{8}$.

27. Albano disse a sua irmã: «Eu tenho o dobro da tua idade, e, se eu tivesse mais 15 annos, teria tres vezes os teus annos.» Qual era idade de cada um? Resp. ?

28. A somma das idades de A, B e C é 109 annos; B é 3 annos mais moço do que A, e 5 annos mais velho do que C. Quaes são as suas idades? Resp. ?

29. Qual é o numero que se $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ de si mesmo lhe forem juntos e ainda mais 26, a somma será igual a 5 vezes o mesmo numero? Resp. ?

30. Um menino disse: «Se a metade e um terço do meu dinheiro e mais 9$ fossem juntos ao que eu tenho, eu teria 20$.» Quanto tinha elle? Resp. ?

31. Um pai de familia morreu deixando 6:500$ para serem divididos por sua viuva, 2 filhos e 3 filhas, de sorte que cada filho recebesse o dobro da parte de cada filha, e a viuva recebesse 500$ menos do que o total que recebessem todos os filhos. Pergunta-se qual é a parte da viuva, a parte de cada filho, e a de cada filha.
Resp. Viuva 3:000$, cada filho 1:000$, e cada filha 500$.

32. Em uma eleição o numero de votos que tiveram dois candidatos foi 256; ora, tendo o candidato eleito uma maioria de 50 votos, quantos teve cada um? Resp. 153 e 103.

33. Tenho um numero no meu entendimento que, se for multiplicado por 7, e ao producto se addicionar 3, e depois dividir tudo por 2, e deste quociente subtrahir 4, restará 15. Qual é o numero? Resp. 5.

34. Um negociante foi á Capital comprar alguns generos. No primeiro dia gastou $\frac{1}{3}$ do seu dinheiro; no segundo dia $\frac{1}{4}$; no terceiro dia $\frac{1}{5}$; no quarto dia $\frac{1}{6}$, e então restavam-lhe só 300$000. Quanto tinha elle quando chegou? Resp. 6:000$000.

35. Um pintor foi contratado para trabalhar 28 dias em uma obra, com a condição de receber 7$500 em cada dia que trabalhasse, e de pagar 2$500 em cada dia que não comparecesse ao trabalho. No fim dos 28 dias, elle recebeu 120$; quantos dias trabalhou? Resp. 19.

36. Dividir o numero 55 em duas partes, de sorte que uma esteja para a outra, assim como 2 está para 3.

Solução. Sejam $2x=$ a um numero, e $3x=$ ao outro; então a equação será $2x+3x=55$. Sendo $x=11$, um numero será 22 e o outro 33.

Os discipulos que já tiverem estudado proporções em Arithmetica, poderão tambem resolver este problema pelo seguinte modo: $x=$ a um numero, $55-x=$ ao outro numero. Então, $x:55-x::2:3$. Como o producto dos extremos é igual ao producto dos meios, temos a equação $3x=110-2x$, e $x=22$, e $55-x=33$.

Equação

$$2x+3x=55$$
$$5x=55$$
$$x=11$$
$$2x=22$$
$$3x=33.$$

37. A somma de dois numeros é 60, e o menor está para o maior assim como 5 está para 7. Quaes são os numeros?
Resp. 25 e 35.

38. Dividir o numero 92 em quatro partes que estejam na proporção de 3, 5, 7 e 8. Resp. 12, 20, 28 e 32.

39. Um vapor que anda 15 milhas por hora com a corrente, e 10 milhas por hora contra ella, gasta 25 horas em ir e voltar de uma cidade á outra. Qual é a distancia entre as duas cidades?
Resp. 150 milhas.

40. Achar um numero que multiplicado successivamente por 12 e por 8, a differença de seus productos seja 28. Resp. 7.

41. Um alfaiate póde fazer uma peça de obra em 6 dias, e sua mulher póde fazel-a em 9 dias; trabalhando juntos, em quantos dias a poderão fazer?

Solução. Sendo $x=$ ao tempo, e a obra igual 1; então o alfaiate faz $\frac{1}{6}$ cada dia, e a mulher faz $\frac{1}{9}$.

Em x dias, o alfaiate faz $\frac{x}{6}$, e a mulher $\frac{x}{9}$, e os dois juntos fazem $\frac{x}{6}+\frac{x}{9}=1$. O valor de $x=3\frac{3}{5}$, isto é, 3 dias e $\frac{3}{5}$ de um dia.

Equação

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{9}=1$$
$$3x+2x=18$$
$$5x=18$$
$$x=3\tfrac{3}{5}.$$

42. Um lavrador póde colher todo o seu café em 6 dias; seu filho mais velho o póde colher em 8 dias, e seu filho mais moço o póde colher em 24 dias; trabalhando os tres juntos, em quantos dias o poderão colher? Resp. 3 dias.

43. Um professor gasta $\frac{2}{5}$ do seu ordenado annual em casa e comida, $\frac{1}{3}$ do resto em livros e roupa, e ainda economiza 2:400$ cada anno; qual é o seu ordenado? Resp. 6:000$000.

44. Qual é o numero cuja terça parte excede 15 á quarta parte do mesmo numero? Resp. ?

45. Uma raposa perseguida por um galgo, levava-lhe a dianteira de 60 pulos. A raposa dava 9 pulos emquanto o galgo dava 6; mas 3 pulos deste valiam 7 pulos daquella. Quantos pulos deu o galgo para alcançar a raposa?

Solução. Este problema offerece alguma difficuldade por causa das unidades diversas que apparecem nos dados, e por isso vamos resolvel-o.

Se o galgo dava 6 pulos, emquanto a raposa dava 9, deveria dar 1, emquanto a raposa dava $\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ pulos.

E se 3 pulos do galgo são iguaes a 7 pulos da raposa, então 1 pulo do galgo é igual a $\frac{7}{3}$ da raposa. Ora, se o galgo dava 1 pulo, emquanto a raposa dava $\frac{3}{2}$, mas se o pulo do galgo estava para o da raposa na razão de $\frac{7}{3}$ para 1, segue-se que o galgo pulava na razão de $1\times\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$, e a raposa na razão de $1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$. Nestas duas fracções estão as duas velocidades reduzidas proporcionalmente á mesma unidade de medida.

Seja, pois, x o numero de pulos que dará o galgo para alcançar a raposa. Então o galgo pulará $\frac{7}{3}x$, e a raposa $\frac{3}{2}x$; ora, como o galgo tem de vencer a distancia que anda a raposa e ainda mais os 60 pulos que ella lhe leva de distancia, segue-se que a equação deve ser $\frac{7x}{3}=\frac{3x}{2}+60$, e o resultado é 72 pulos.

Equação

$$\frac{7x}{3}=\frac{3x}{2}+60$$
$$14x=9x+360$$
$$5x=360$$
$$x=72.$$

Verificação. O galgo andou 72 pulos dos seus, no mesmo tempo em que a raposa andou $72\times\frac{3}{2}=108$ pulos dos seus. Ora, 108 pulos com mais 60 que a separam do galgo fazem 168. Como um pulo do galgo vale $\frac{7}{3}$ do pulo da raposa, o galgo andou $72\times\frac{7}{3}=168$ pulos da raposa.

Equações simultaneas com duas incognitas

192. Duas ou mais equações de mais de uma incognita podem ser simultaneas ou independentes.

As equações são **simultaneas** quando cada uma das incognitas tem o mesmo valor nessas equações; assim, $x+y=12$, e $3x-2y=11$ são duas equações simultaneas, porque em ambas x tem o valor de 7, e y tem o valor de 5.

As equações são **independentes** quando teem as mesmas lettras, mas com valores differentes; assim $x+y=18$, e $x+y=36$ são equações independentes, porque teem as mesmas lettras, mas com valores differentes, pois em uma equação sommam 18, e em outra, 36.

Nota. Mais adiante trataremos ainda das equações independentes; aqui precisamos desenvolver somente o ensino das equações simultaneas.

193. Se tivermos uma só equação com duas quantidades desconhecidas, não poderemos de modo algum saber qual é o verdadeiro valor de cada uma dessas incognitas. Assim, na equação

$$x+y=12,$$

como o numero 12 póde ser formado de muitos modos, como $11+1$, $10+2$, $9+3$, $8+4$, $7+5$, e $6+6$, não podemos saber quaes são os verdadeiros valores que x e y representam. Quando, pois, o numero das quantidades desconhecidas é maior do que o numero das equações, o problema ha de ter uma solução indeterminada, isto quer dizer que póde ter muitas respostas.

Mas, se com a equação $x+y=12$ tivermos outra equação auxiliar que seja simultanea com ella, isto é, que tenha as lettras x e y com os mesmos valores, como, por exemplo, a equação $x+2y=17$, então poderemos reduzir estas duas equações a uma só, eliminando uma das incognitas, e deste modo, será facil achar o valor da outra, porque se na equação $x+y=12$ o valor de x é 7, então o valor de y será $12-7=5$.

194. Os problemas que teem mais de uma quantidade desconhecida, devem portanto, ter tantas equações simultaneas quantas forem as quantidades desconhecidas.

195. Chama-se **eliminação** o processo que tem por fim combinar duas equações simultaneas, contendo duas ou mais quantidades desconhecidas, para as reduzir a uma equação simples com uma só incognita.

196. Ha tres methodos ou modos de eliminação :

1° *Eliminação pela reducção ao mesmo coefficiente.*
2° *Eliminação por comparação.*
3° *Eliminação por substituição.*

Eliminação pela reducção ao mesmo coefficiente

197. A eliminação pela reducção ao mesmo coefficiente consiste em multiplicar ou dividir uma ou ambas as equações, de modo que o coefficiente de uma incognita fique igual em ambas as equações, para depois, pela addição ou pela subtracção, fazermos desapparecer essa incognita. Esse methodo tem tambem o nome de *eliminação por meio da addição ou subtracção.*

Problema. Qual é o valor de x e de y nas equações simultaneas $2x+y=15$ e $3x-y=5$?

$$\begin{array}{rl} 2x+y=15 & (1^a) \\ 3x-y=5 & (2^a) \\ \hline 5x \quad =20 & \\ x \quad =4. & \end{array}$$

Solução. Sendo o coefficiente de y igual em ambas as equações (n.° 22), mas tendo os signaes differentes, isto é, sendo um + e outro —, elimina-se esta lettra somando as duas equações (n.° 51). O resultado da addição é $5x=20$, e $x=4$.

O valor de y póde ser achado, substituindo-se na 1ª equação o termo $2x$ pelo seu respectivo valor que é 8; e então teremos $8+y=15$ ou $y=7$.

$$\begin{array}{r} 8+y=15 \\ y=15-8 \\ y=7. \end{array}$$

Problema. Achar o valor de x e de y nas equações simultaneas $3x+2y=34$ e $x+2y=22$.

$$\begin{array}{rl} 3x+2y=34 & (1^a) \\ x+2y=22 & (2^a) \\ \hline 2x \quad =12 & \\ x \quad =6. & \end{array}$$

Solução. Sendo os coefficientes de y iguaes em ambas as equações, e tendo signaes iguaes, elimina-se esta lettra por meio da subtracção. O resultado da subtracção é $2x=12$ ou $x=6$.

O valor de y póde ser achado, substituindo-se na 2ª equação a lettra x pelo seu valor que é 6, e então teremos $6+2y=22$; $2y=22-6$, e $y=8$.

198. Nos dois problemas que acabamos de resolver, vemos que quando uma incognita tem coefficientes iguaes e signaes differentes, elimina-se por meio da addição das duas equações simultaneas; mas quando tem signaes iguaes, elimina-se por meio da subtracção.

Passemos agora a considerar o caso quando os coefficientes das incognitas são differentes.

Problema. Qual é valor de x e de y nas equações simultaneas $3x-5y=6$ e $4x+3y=37$?

$$\begin{array}{rl} 4x+3y=37 & (1^a) \\ 3x-5y=6 & (2^a) \\ 12x+9y=111 & (3^a) \\ 12x-20y=24 & (4^a) \\ \hline 29y=87 & \\ y=3. & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x+9=37 \\ 4x=37-9 \\ x=7. \end{array}$$

Solução. Nestas duas equações simultaneas, como os coefficientes são todos differentes, temos de igualar os coefficientes de x ou de y.

Para igualarmos os coefficientes de x, temos de multiplicar a 1ª equação por 4, e a 2ª por 3, e então ambos os termos desta incognita ficarão $12x$. Para igualarmos os coefficientes de y, temos de multiplicar a 1ª equação por 3, e a 2ª por 5, e então ambos os termos desta incognita ficarão $15y$. Vamos agora eliminar a lettra x. Multiplicando a 1ª equação por 3, o producto será a 3ª equação; e multiplicando a 2ª equação por 4, o producto será a 4ª equação. (Vêde n.° 176).

Ora, como nestas duas novas equações simultaneas (3ª e 4ª) os coefficientes de x são iguaes e teem signaes iguaes, elimina-se esta lettra por meio da subtracção, e o resultado é $29y=87$, ou $y=3$. Substituindo agora na 1ª equação $3y$ por $3\times3=9$, temos $4x+9=37$ ou $x=7$.

Regra. *Multiplica-se ou divide-se uma ou ambas as equações por um ou dois numeros, de sorte que os coefficientes de uma incognita fiquem iguaes em ambas as equações, e, se os signaes dessa incognita forem differentes, addicionam-se as duas equações, e se forem iguaes, subtrahe-se a menor da maior.*

Nota. Quando uma ou ambas as equações simultaneas teem termos fraccionarios, inteiram-se esses termos, e depois procede-se conforme a regra. (Vêde n.° 181).

Achar o valor de x e y nas seguintes equações, pelo methodo da reducção ao mesmo coefficiente:

1. $2x+3y=23$, $5x-2y=10$. Resp. $x=4$, $y=5$
2. $4x+y=34$, $4y+x=16$. » $x=8$, $y=2$
3. $30x+40y=270$, $50x+30y=340$. » $x=5$, $y=3$
4. $2x+7y=34$, $5x+9y=51$. » ?
5. $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=18$, $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=21$. » ?
6. $2x+y=50$, $\frac{x}{6}+\frac{y}{7}=5$. » ?
7. $5x+7y=43$, $11x+9y=69$. Resp. ?
8. $8x-21y=33$, $6x+35y=177$. » ?
9. $21y+20x=165$, $77y-30x=295$. » ?
10. $11x-10y=14$, $5x+7y=41$. » ?
11. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=7$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=5$. » ?
12. $\frac{x}{5}+\frac{y}{10}=2$, $4x-2y=0$. » ?

Eliminação por comparação

199. A eliminação por comparação consiste em achar o valor da mesma incognita em termos da outra nas duas equações, e depois pela comparação dos dois valores, formar uma equação simples, como vamos ver na seguinte solução :

Problema. Qual é o valor de x e y nas equações $x+y=16$ e $2x-y=14$?

Solução. O valor de x na primeira equação é $16-y$; e na segunda equação o valor de $2x$ é $14+y$, e de x é $\frac{14+y}{2}$. Ora, como o valor de x é igual em ambas as equações, segue-se que $16-y=\frac{14+y}{2}$. Resolvida esta equação, vemos que $y=6$; e $x=16-6=10$.

$$x+y=16 \quad (1^a)$$
$$2x-y=14 \quad (2^a)$$
$$x=16-y$$
$$x=\frac{14+y}{2}$$
$$16-y=\frac{14+y}{2}$$
$$y=6.$$

Regra. *Acha-se em cada equação o valor da incognita que se quer eliminar, exprimindo o seu valor em termos das outras quantidades.*

Fórma-se uma nova equação destes valores iguaes, e resolve-se como uma equação simples.

O discipulo deve resolver as seguintes equações simultaneas, eliminando a incognita pelo methodo de comparação:

1.	$x+y=12$ $x-y=4$.	Resp. $x=8$ $y=4$	4.	$4x+3y=13$ $3x+2y=9$.	Resp. ?
2.	$2x+2y=36$ $3x-3y=18$.	Resp. $x=12$ $y=6$	5.	$3x+2y=118$ $x+5y=191$.	Resp. ?
3.	$x+y=20$ $2x+3y=42$.	Resp. $x=18$ $y=2$	6.	$4x+5y=22$ $7x+3y=27$.	Resp. ?

Eliminação por substituição

200. A eliminação por substituição consiste em achar em uma equação o valor de uma incognita em termos das outras quantidades, e depois substituir na outra equação aquella incognita por seu valor achado.

Problema. Qual é o valor de x e y nas equações simultaneas $x+2y=17$ e $2x+3y=28$?

Solução. Na primeira equação x é igual a $17-2y$, e $2x=2(17-2y$; substituindo na 2ª equação $2x$ pelo seu valor, que é $2(17-2y)$, temos a equação $2(17-2y)+3y=28$. Resolvendo esta equação, temos $y=6$.

Substituindo agora na 1ª equação $2y$ por $6+6=12$, temos $x+12=17$, e $x=5$.

$$x+2y=17 \quad (1^a)$$
$$2x+3y=28 \quad (2^a)$$
$$x=17-2y$$
$$2(17-2y)+3y=28$$
$$\text{ou } 34-4y+3y=28$$
$$y=6, \text{ e } x=5.$$

Regra. *Acha-se em uma equação o valor de uma incognita em termos das outras quantidades, e na outra equação substitue-se esta incognita pelo seu valor achado, e depois resolve-se como na equação simples.*

Achar pelo methodo de substituição os valores de x e y nas seguintes equações simultaneas :

1.	$x+5y=38$ $3x+4y=37$.	Resp. $x=3$ $y=7$	4.	$4x-3y=26$ $3x-4y=16$.	Resp. ?
2.	$2x+4y=22$ $5x+7y=46$.	Resp. $x=5$ $y=3$	5.	$2x+3y=28$ $3x+2y=27$.	Resp. ?
3.	$3x+5y=57$ $5x+3y=47$.	Resp. $x=4$ $y=9$	6.	$4x+y=43$ $5x+2y=56$.	Resp. ?

Problemas com duas incognitas

201. Agora, que o discipulo já sabe resolver equações simultaneas com duas quantidades desconhecidas, poderá tambem resolver os problemas que apresentarem o mesmo numero de incognitas.

I Problema. A somma de dois numeros é 25, e a sua differença é igual a 9; quaes são os numeros ?

Solução. Seja $x=$ ao numero maior, e $y=$ ao numero menor ; então a somma dos dois numeros é 25, e a sua differença é 9. Eliminando em ambas as equações a lettra y por meio da somma, temos $x=17$, e $y=8$.

$$x+y=25$$
$$x-y=9$$
$$2x=34$$
$$x=17$$
$$y=8.$$

Nota. Como já vimos na secção n.º 191, este problema póde ser resolvido com uma só incognita; damol-o tambem aqui para o discipulo o resolver com duas. A Algebra offerece meios variados de resolver os problemas.

II Problema. A somma de dois numeros é 44, e um está para o outro assim como 5 está para 6. Quaes são os numeros?

Solução. Seja $x=$ ao numero maior, e $y=$ ao numero menor; então, como um está para o outro, assim como 5 para 6, segue-se que $5x=6y$. Eliminando a lettra x, temos $y=20$ e $x=24$.

Este problema póde tambem ser resolvido com uma só incognita, na seguinte equação $5x+6x=44$.

$$x+y=44 \quad (1^a)$$
$$5x-6y=0 \quad (2^a)$$
$$5x+5y=220$$
$$-11y=-220$$
$$y=20$$
$$x=24.$$

III Problema. Achar dois numeros taes que, se a metade do primeiro for addicionada com o segundo, a somma será 34, e se um terço do segundo for addicionado com o primeiro, a somma será 28.

Solução. Seja $x=$ ao primeiro numero, e $y=$ ao segundo.

O enunciado do problema está expresso nas duas equações.
Operando a solução, acharemos que $x=20$, e $y=24$.
O discipulo fará a verificação.

$$\frac{x}{2}+y=34$$
$$x+\frac{y}{3}=28$$
$$x=20$$
$$y=24.$$

IV Problema. Dois mascates irlandezes contaram o seu dinheiro, e depois disse um ao outro: Dá-me um terço do teu dinheiro, e eu terei 110 libras; respondeu-lhe o outro: Dá-me um quarto do teu dinheiro, e eu terei tambem 110 libras. Quantas libras tinha cada um?

Solução. Seja $x=$ ao numero que tinha um mascate, e $y=$ ao que tinha o outro; então pelo enunciado do problema, podemos formular as duas equações que estão ao lado, nas quaes $x=80$ e $y=90$.

$$x+\frac{y}{3}=110$$
$$\frac{x}{4}+y=110$$

5. Achar dois numeros em taes condições que, $\frac{1}{2}$ do primeiro e um $\frac{1}{3}$ do segundo sommem 22, e $\frac{1}{4}$ do primeiro e $\frac{1}{5}$ do segundo sommem 12. Quaes são os numeros? Resp. 24 e 30.

6. Se o maior de dois numeros fosse junto a $\frac{1}{3}$ do menor, a somma seria 37; mas se do menor fosse subtrahido $\frac{1}{4}$ do maior, o resto seria 20. Qaes são os numeros? Resp. ?

7. Um negociante vendeu 20 duzias de garrafas de vinho e 30 duzias de garrafas de cerveja por 240$000; em outra occasião vendeu, a razão do mesmo preço, 30 duzias de garrafas de vinho e 25 de cerveja por 280$000. Qual é o preço de cada duzia de garrafas de vinho, e de cerveja? Resp. Vinho 6$, cerveja 4$.

8. Um fazendeiro vendeu a um visinho 9 cavallos e 7 vaccas por 900$000, e a outro vendeu a razão do mesmo preço 6 cavallos e 13 vaccas pela mesma quantia de 900$000. Qual é o preço de cada cavallo e de cada vacca? Resp. 72$ e 36$.

9. Um viajante tinha dois cavallos que lhe custaram certo preço cada um; depois comprou um sellim inglez por 100$000: ora, quando elle punha o sellim no primeiro cavallo, este com o sellim valia o dobro do segundo; e quando punha o sellim no segundo, este com o sellim valia 3 vezes o primeiro. Quanto lhe custou cada cavallo? Resp. 1°=60$, 2°=80$.

10. Se juntarmos 8 ao numerador de uma fracção, ella ficará igual a 2; mas se subtrahirmos 5 do denominador, a fracção ficará igual a 3. Qual é a fracção? Resp. ?

11. Ha dois numeros que sommam 37, e se 3 vezes o menor for subtrahido de 4 vezes o maior, e o resto dividido por 6, o quociente será 6. Quaes são os dois numeros? Resp. 16 e 21.

12. Se subtrahirmos 3 de ambos os termos de uma fracção, ella ficará $\frac{1}{4}$; mas, se juntarmos 5 a ambos os termos, ella ficará $\frac{1}{2}$. Qual é a fracção? Resp. ?

13. Se o maior de dois numeros fosse multiplicado por 5, e o menor por 7, a somma dos seus productos seria 198; mas, se o maior fosse dividido por 5, e o menor por 7, a somma dos seus quocientes seria 6. Quaes são os numeros? Resp. 20 e 14.

14. Arthur devia 500$000, e Henrique devia 600$000; mas nem um nem outro tinha dinheiro sufficiente para pagar o que deviam. Disse Arthur a Henrique: Empresta-me $\frac{1}{5}$ do teu dinheiro, e eu então poderei pagar o que devo; respondeu-lhe Henrique: Empresta-me $\frac{1}{4}$ do teu dinheiro, e eu pagarei tambem o que devo. Que quantia tinha cada um? Resp. Arthur 400$, Henrique 500$.

15. Um pai repartiu 2:400$000 por seus dois filhos A e B para elles negociarem. No fim de um anno, A tinha perdido $\frac{1}{4}$ do seu capital, emquanto que B, tendo ganho uma somma igual a $\frac{1}{4}$ do seu capital, achou que o seu dinheiro era justamente igual ao de seu irmão. Que quantia deu o pai a cada um?

Resp. A=1:500$000 e B=900$000.

16. Ha 7 annos, a idade de Samuel era tres vezes a idade de Elias, e de hoje a 7 annos, a idade de Samuel será justamente o dobro da idade de Elias. Quaes são as suas idades?

Resp. Samuel 49 e Elias 21.

17. Dividir o numero 75 em duas partes, de sorte que tres vezes a maior exceda 15 a sete vezes a menor. Quaes são as partes? Resp. ?

18. Achar dois numeros taes que a somma de cinco vezes o primeiro e duas vezes o segundo seja 19; e a differença entre sete vezes o primeiro e seis vezes o segundo seja 9. Resp. ?

19. Uma casa e o terreno importaram em 8:500$000, o preço do terreno é $\frac{5}{12}$ do preço da casa. Achar o preço de cada um.

Resp. Casa 6:000$, Terreno 2:500$.